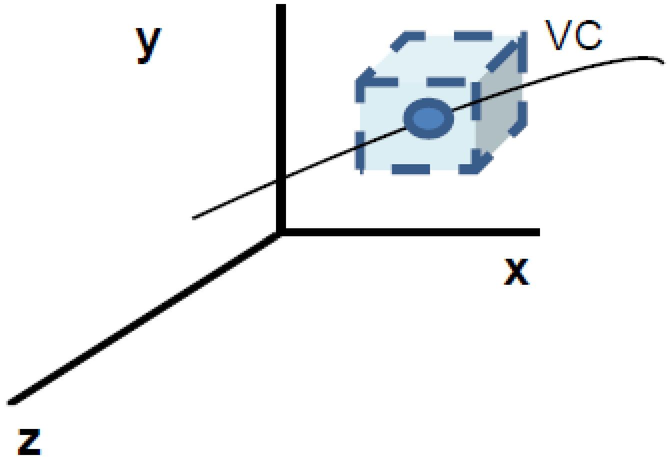
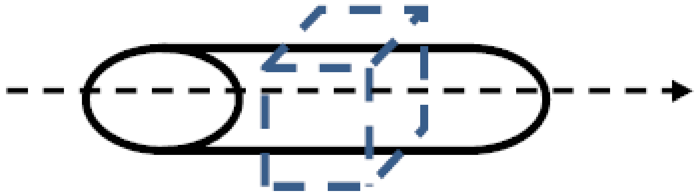
DINÁMICA DE LOS FLUIDOS

Método de Euler: El observador se encuentra en reposo en un punto del espacio y ve cuál es la velocidad, presión y demás propiedades en es punto. El fluido se renueva constantemente. Da la idea de volumen de control. Los sistemas van pasando, las partículas se renuevan.

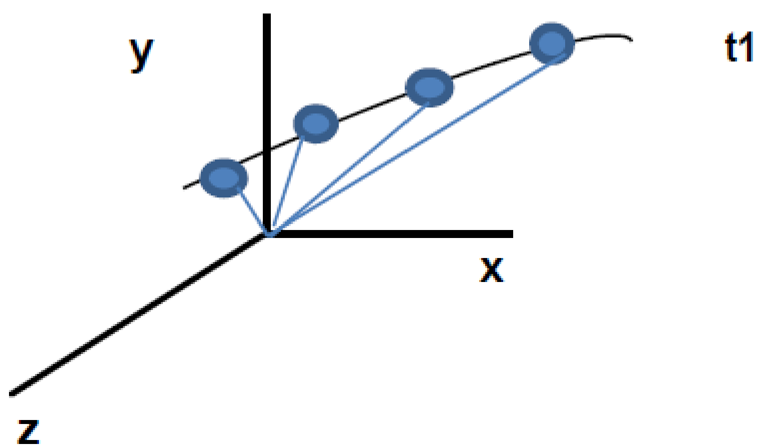
Es una región específica que no cambia su posición ni su forma. (VC)



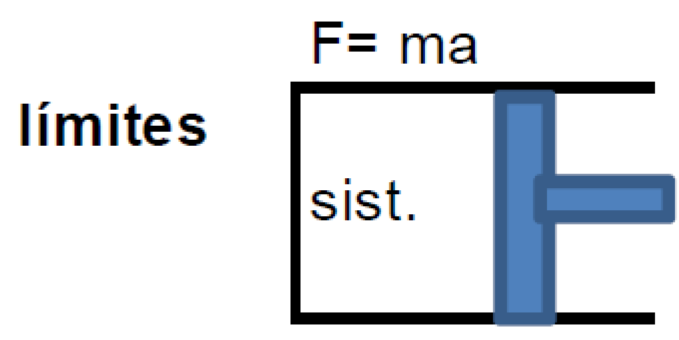


Método Lagrange

El observador sigue la partícula y observa como varían sus propiedades en un determinado instante. Hay que conocer la variación del vector posición.



El sistema es una cantidad de materia determinada. Siempre son las mismas partículas



ECUACIONES DE NAVIER STOKES

Son ecuaciones que describen el movimiento de un fluido real en forma general considerando las fuerzas que actúan sobre un volumen de control. La hipótesis se plantea para fluidos newtonianos. Intervienen fuerzas gravitacionales, viscosas y de presión. La ecuación de la viscosidad de Newton se debe extender a flujos tridimensionales (tensoriales).

a) $-\delta p/\delta x + \mu\,(\delta^2 u/\delta x^2 + \delta^2 u/\delta y^2 + \delta^2 u/\delta z^2) = \rho\,(\delta u/\delta t + u\,\delta u/\delta x + v\,\delta u/\delta y + w\,\delta u/\delta z)$

b) $-\delta p/\delta y + \mu\,(\delta^2 v/\delta x^2 + \delta^2 v/\delta y^2 + \delta^2 v/\delta z^2) = \rho\,(\delta v/\delta t + u\,\delta v/\delta x + v\,\delta v/\delta y + w\,\delta v/\delta z)$

c) $-\rho g - \delta p/\delta z + \mu\,(\delta^2 w/\delta x^2 + \delta^2 w/\delta y^2 + \delta^2 w/\delta z^2) = \rho\,(\delta w/\delta t + u\,\delta w/\delta x + v\,\delta w/\delta y + w\,\delta w/\delta z)$

Nótese que las ecuaciones de Navier-Stokes se reducen a las ecuaciones de Euler para el caso de flujo no viscoso.

Las ecuaciones de N-S no tienen una solución analítica general, pero sí para casos particulares.
Intervienen fuerzas másicas (g), debidas a la presión (p) y viscosas (m). Estos términos son iguales a la variación de la cantidad de movimiento con respecto al tiempo en el lado derecho de las ecuaciones.

ECUACION DE EULER

Se considera un fluido ideal, sin viscosidad, irrotacional y en régimen permanente.

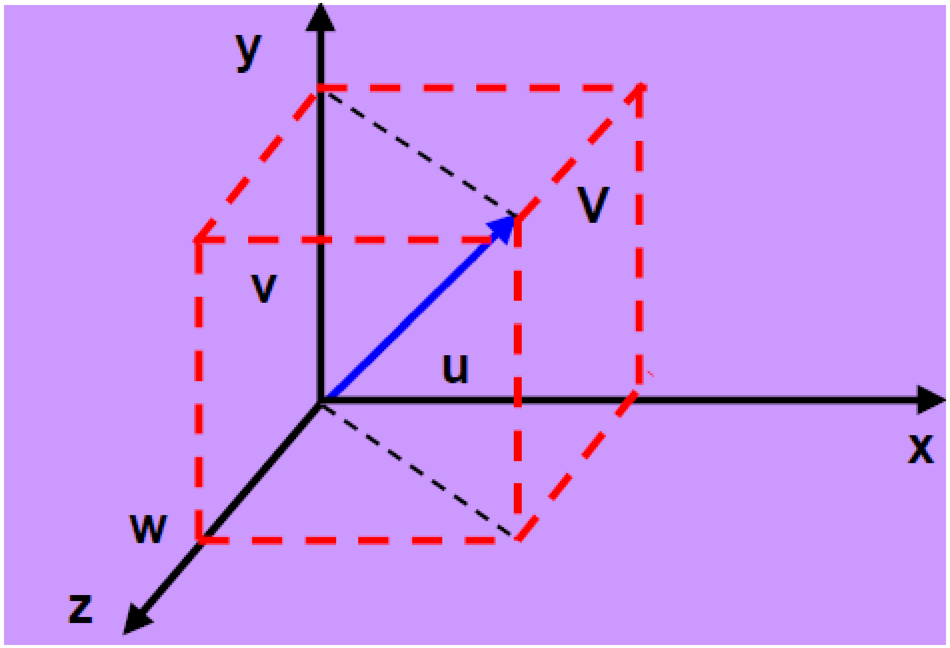
Fuerzas actuantes en el movimiento del fluido:

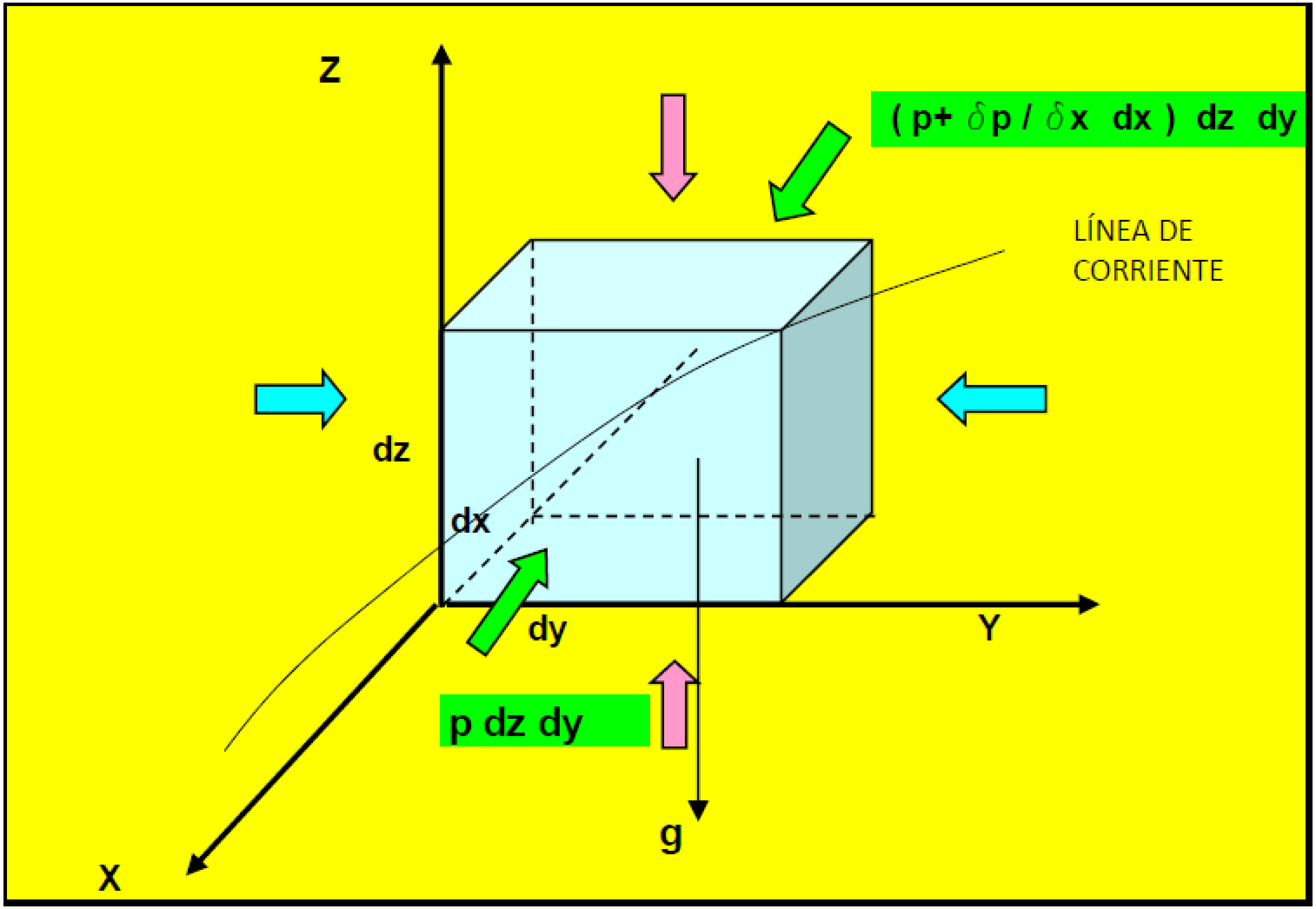
1) Fuerza de gravedad (externa al fluido).
2) Fuerza causada por diferencia de presiones.
3) Fuerzas de viscosidad (si es ideal : viscosidad = 0).
4) Fuerzas de elasticidad (si es incompresible son nulas).
5) Tensión superficial (poca importancia relativa).

En la deducción intervienen las dos primeras.

La segunda ley de Newton establece que F = m a , y que el vector aceleración tiene la misma dirección que el vector fuerza resultante.
Considerando un paralelepípedo de fluido en el que actúan las fuerzas debidas a las presiones y a la gravedad:

Vx=u= f(x,y,z,t)
Vy=v= f(x,y,z,t)
Vz=w = f(x,y,z,t)




Z
(p+ δp / δx dx) dz dy
LÍNEA DE
CORRIENTE
dz
dx
dy
Y
p dz dy
g
X

Fuerzas unitarias (F / m) X, Y, Z en las direcciones x, y, z

$\Sigma F_x = m\, a_x$ según la dirección x F/masa

p dz dy - p dz dy - dp / dx dx dy dz + Xρdx dy dz =
ρ dx dy dz du / dt

(-)d**p** / d**x + X ρ = ρ du / dt**

Ecuaciones de Euler de la aceleración

(-)d**p** / d**x 1/ ρ + X = du / dt**

(-)d**p** / d**y 1/ ρ + Y = dv / dt**

(-)d**p** / d**z 1/ ρ + Z = dw / dt**

En el caso real la única fuerza unitaria que se considera es la aceleración de la gravedad g (z).

$(-)dp / dx \; 1/ \rho = du / dt$
$(-)dp / dy \; 1/ \rho = dv / dt$
$(-)dp / dz \; 1/ \rho - g = dw / dt$

Ecuaciones de Euler de la aceleración para régimen permanente y fluido incompresible (ρ =cte).

ECUACION DE BERNOULLI
Partiendo de las ecuaciones de Euler y multiplicando miembro a miembro por dx , dy y dz.

$(-)dp / dx\ 1/\rho\ dx = du / dt\ dx$
$(-)dp / dy\ 1/\rho\ dy = dv / dt\ dy$
$(-)dp / dz\ 1/\rho\ dz - g\ dz = dw / dt\ dz$

Sumando m. a m.:

$(-)1/\rho(dp / dx\ dx + dp / dy\ dy + dp/ dz\ dz) - g\ dz =$
$du / dt\ dx + dv / dt\ dy + dw / dt\ dz$

$u = dx / dt\ v = dy / dt\ w = dz / dt$

$(dp / dx\, dx + dp / dy\, dy + dp / dz\, dz) = dP$

Siendo:
diferencial total de presiones (en régimen permanente la densidad no es función del tiempo)

$(-)\ dP / \rho - g\, dz = u\, du + v\, dv + w\, dw$

$u\, du = d\, u^2 / 2 = 2\, u / 2\, du$ **igual para v y w.**

$(-)\ dP / \rho - g\, dz = d /2\, (u^2 + v^2 + w^2) = 1/2\, d\, (V^2)$

$dP / \rho + g\, dz + 1/2\, d\, V^2 = 0$

Para fluido compresible, ideal y en régimen permanente hay que integrar. La densidad es sólo función de P.

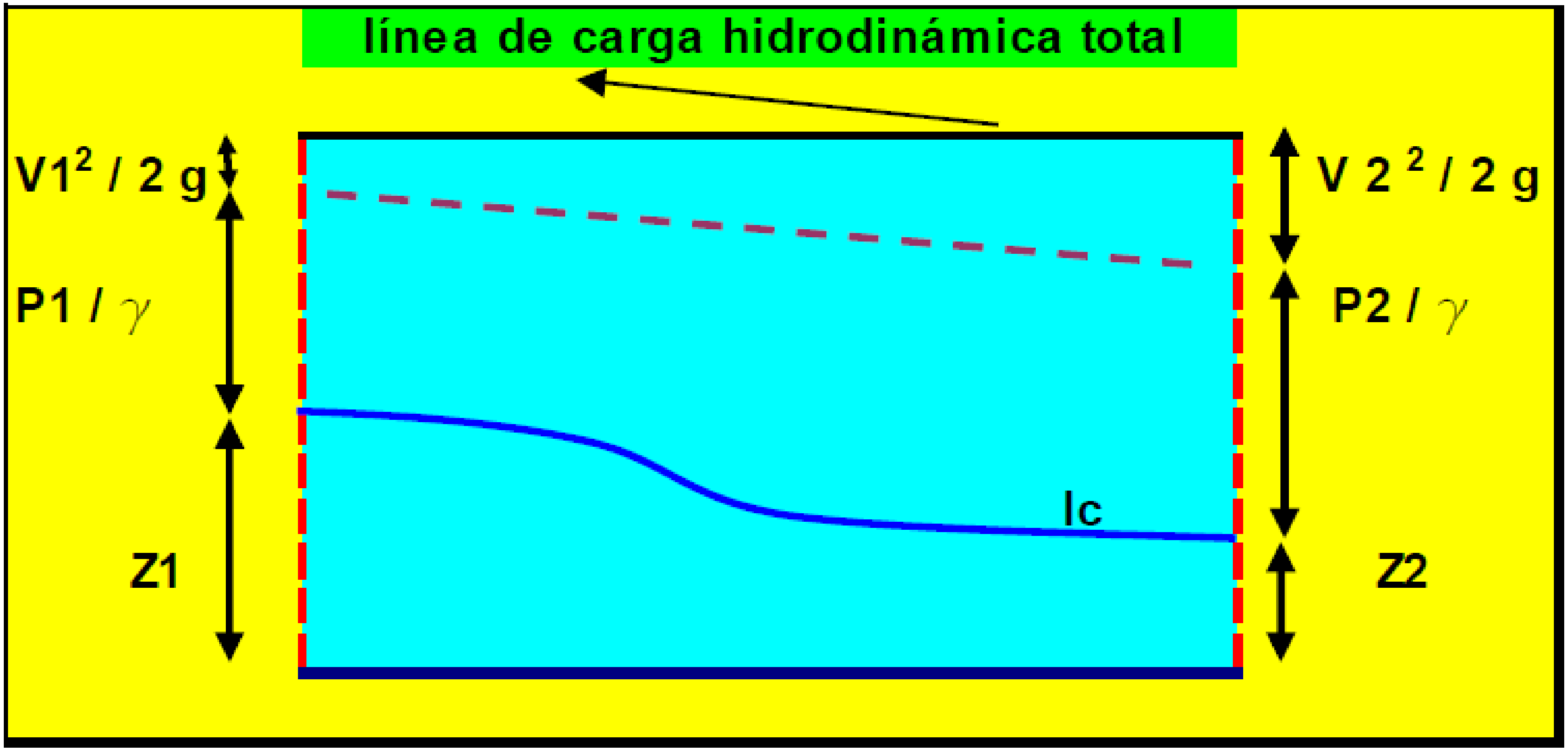
$$P / \rho + g\, dz + 1/2\, V^2 = cte$$

Para fluido incompresible, ideal y en régimen permanente.

$$P / \gamma + z + V^2 / 2g = cte$$

$$\gamma = \rho * g$$

A lo largo de una línea de corriente la suma de las energías de presión (E. Presión), de posición (E. potencial) y de velocidad (E. Cinética) se mantiene constante. (Principio de conservación de la energía).



Cada término expresa una energía por unidad de peso (Kgm / Kg, por ejemplo) y aumentan o disminuyen para que se mantenga la constancia de la suma. Este valor se llama altura de carga hidrodinámica total.

En la práctica se aplica Bernoulli a una cañería como si ésta fuera una única línea de corriente y se usan valores medios.

($P / \gamma + z$) es la altura piezométrica. En realidad, al no tratarse de fluidos ideales, por efectos de la viscosidad se producen pérdidas de carga que hacen que la línea hidrodinámica no sea horizontal.

Ecuación de la Energía

Para un fluido compresible

$$P / \rho + g\, dz + 1/2\, V^2 = cte$$

Para fluido incompresible, ideal y en régimen permanente.

$$P/ \gamma + z + V^2 /2g = cte$$

En un fluido real la ecuación debe ser modificada para poder aplicarla. En el caso ideal no se incluyen las pérdidas, y el trabajo por unidad de masa que realizan las distintas máquinas en el circuito (bombas, o turbinas) ni considera otros intercambios energéticos.

Hay una diferencia de tratamiento de los distintos autores: Mataix propone fluidos en los que no hay variaciones de temperatura, reacciones químicas, nucleares o de otro tipo, mientras que Streeter y Franzini incluye todas las posibilidades de intercambio de energía.

Considerando un fluido real, compresible en régimen permanente:

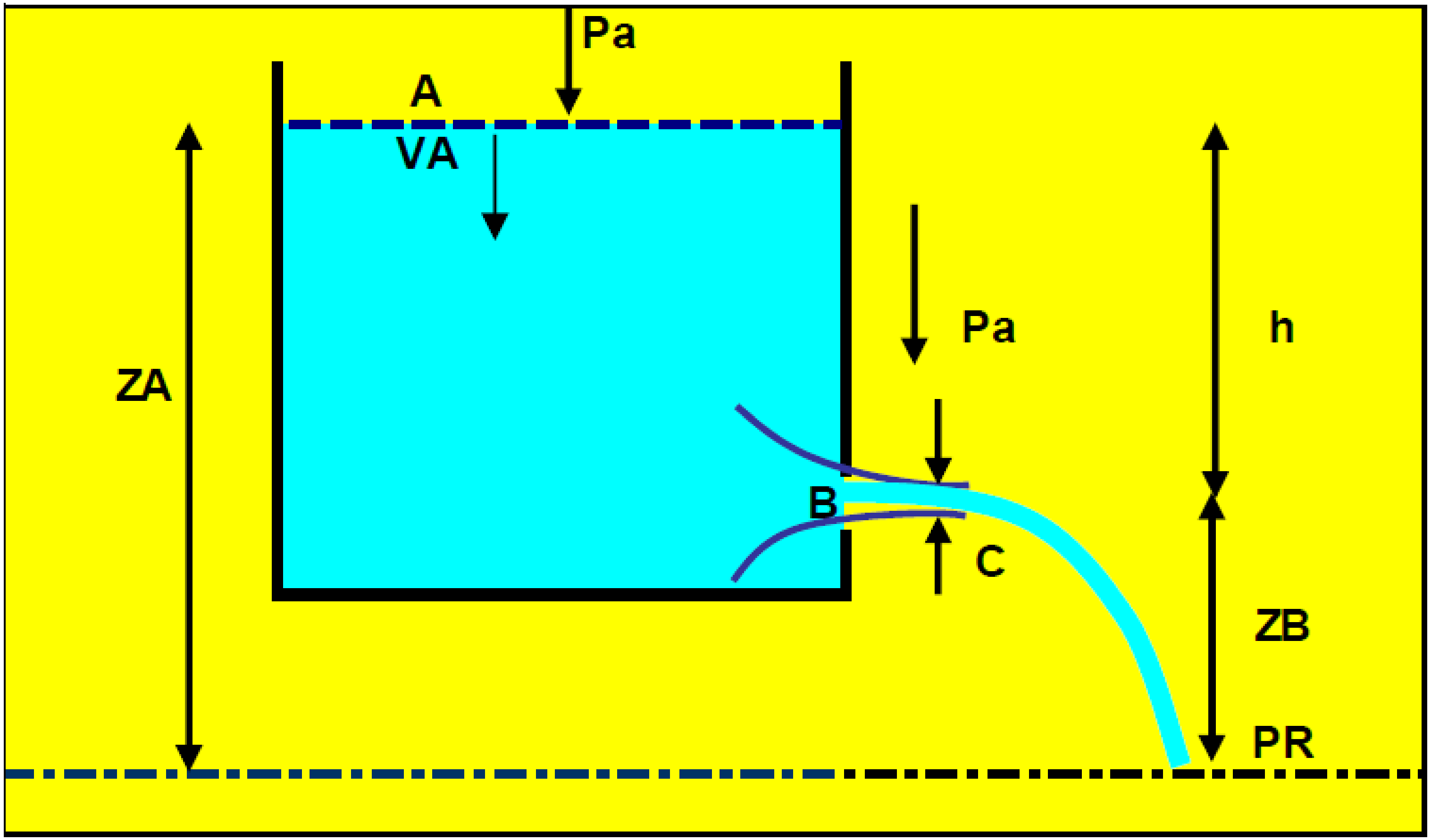
Según Mataix la ecuación se modifica de la siguiente manera:

$$P / \rho + g\,dz + 1/2\, V^2 - \Sigma Hp + \Sigma Hwr - \Sigma Hwe = cte$$

Según Franzini

$$P/\rho + g\,dz + 1/2\, V^2 - \Sigma Hp + \Sigma Hwr - \Sigma Hwe + \Sigma Ir - \Sigma Ie + \Delta Q = cte$$

APLICACIONES DE LA ECUACION DE BERNOULLI
SALIDA POR UN ORIFICIO (ECUACION DE TORRICELLI):



Planteando Bernoulli entre A y C:

$$P_A / \gamma + Z_A + V_A^2 / 2g = P_C / \gamma + Z_C + V_C^2 / 2g$$

$$V_A << V_B \,;\, V_A \sim 0$$

$$P_A = P_B = P_{atm}.$$

$$Z_A - Z_B = h$$

Fluido incompresible y sin viscosidad.

$$Vc^2 = 2\,g\,h$$

$$Vc = (2\,g\,h)^{1/2}$$

Velocidad teórica

La velocidad de salida de un fluido por un orificio pequeño en la pared de un recipiente es la misma que tendría cayendo libremente en el vacío desde una altura h.

En el punto C se produce un angostamiento de la sección (líneas de corriente) que se llama vena contracta.

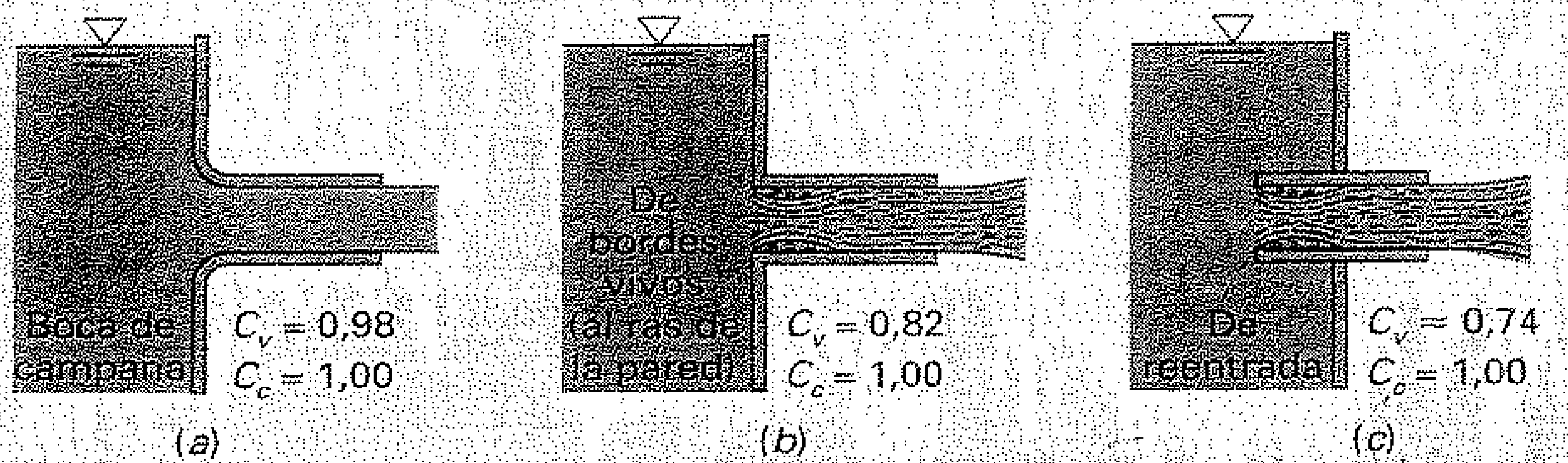
Allí la velocidad será mayor y la presión menor que en el punto B. Esta Vc es teórica (no considera pérdidas) y el apartamiento con la velocidad real se mide por un coeficiente experimental

Cc: coeficiente de contracción (Franzini pág 321)

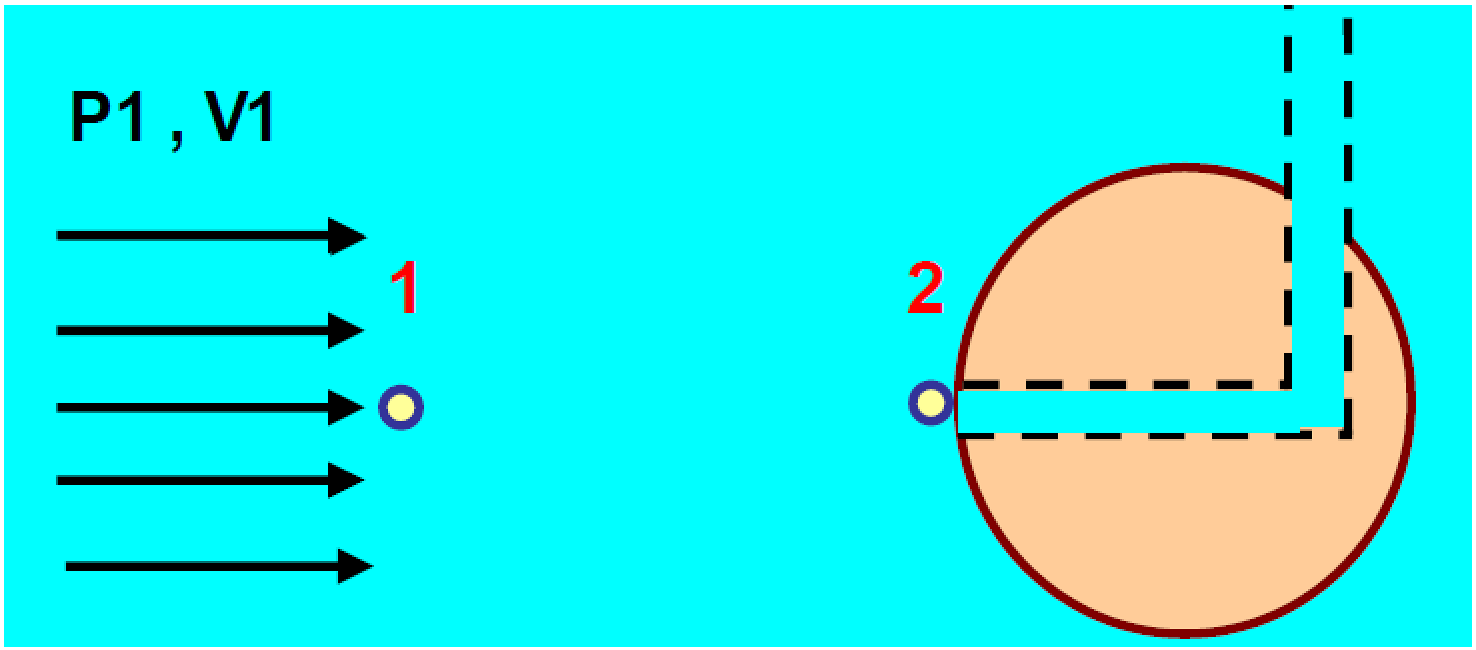
Cc = área de la sección contracta / área del orificio = A_C / AB

Cv = velocidad en C real / velocidad en C teórica = Vcr / Vct

Coeficientes para los tubos.



Cuerpo sumergido en una corriente



En el punto 1 existen P_1 y V_1 (velocidad no perturbada). En el punto 2 la velocidad es cero (punto de impacto o estancamiento).

Aplicando Bernoulli:

$P_1 / \gamma + Z_1 + V_1 2 / 2\,g = P_2 / \gamma + Z_2 + V_2\, 2 / 2\,g$

$Z_2 = Z_1 \quad V_2 = 0$

$P_2 = P_1 + \rho\, V_1^{\,2} / 2$

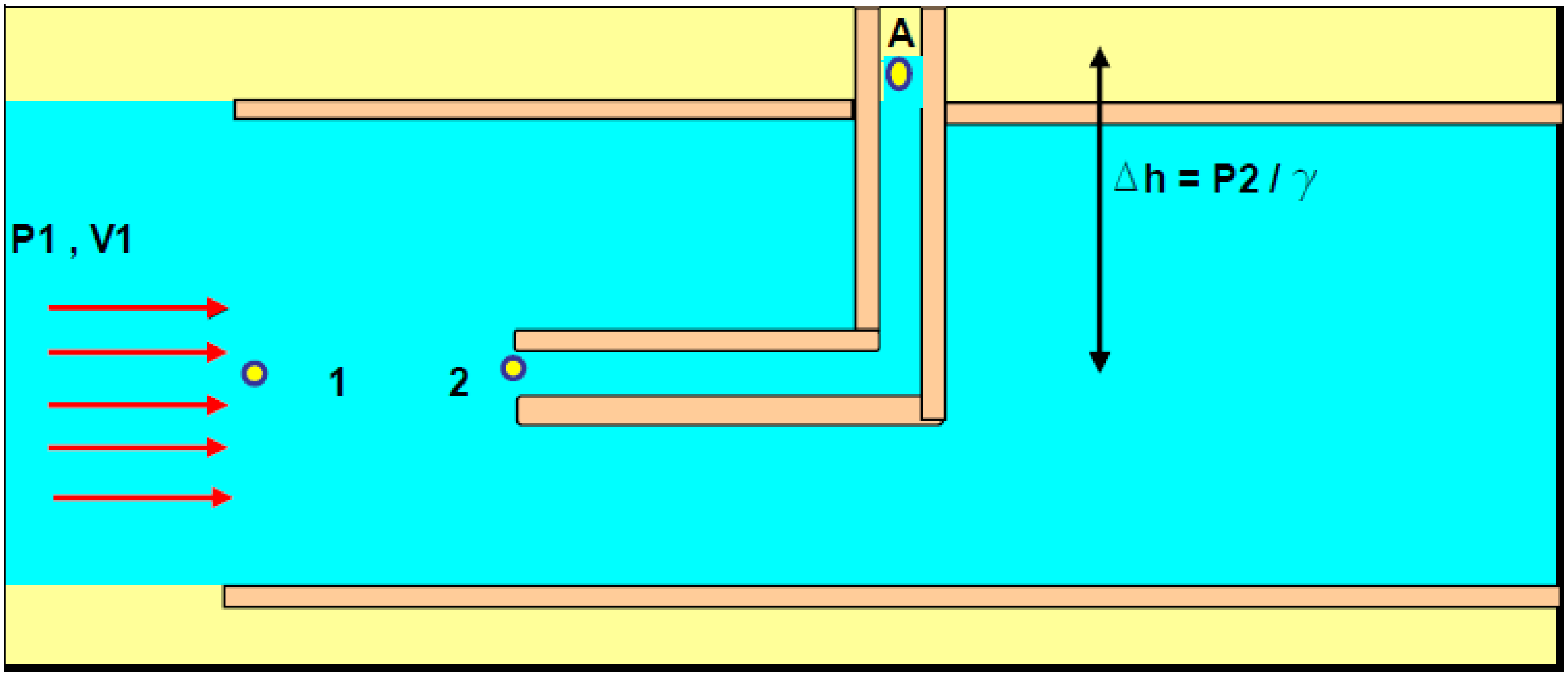
La presión en el punto de impacto es la suma de la presión atmosférica (P_1) más el aporte de la velocidad a la presión , que se llama presión dinámica.

$P_2 - P_1 = \rho V_1^{\,2} / 2$

$\Delta P = \rho V_1^{\,2} / 2$

TUBO DE PITOT

Se utiliza para medir la velocidad de un fluido o la de un objeto que se desplaza respecto de ese fluido (avión respecto del aire).



Δ **P** = ρ **V$_1$^{2} / 2**

Δ **P /** γ **=V$_1$^{2} / 2 g**

Δ **h = V$_1$^{2} / 2 g**

Midiendo la diferencia de alturas se puede conocer la velocidad:

$V_1 = (2 g \Delta h)^{1/2}$

Aplicando Bernouilli entre 2 y A

$Z_2 = Z_A$ $V_2 = V_A$

Condiciones estáticas $P_A = P_{atm}$, $P_{manA} = 0$

$P_2 = \rho \Delta h$

TUBO DE PRANDTL

Prandtl combinó un tubo de Pitot con el cual se determina la presión total en el punto de estancamiento (presión estática + presión dinámica) y un tubo piezométrico con el que se mide la presión estática :

Pitot : P estancam. = P. Estática + P dinámica

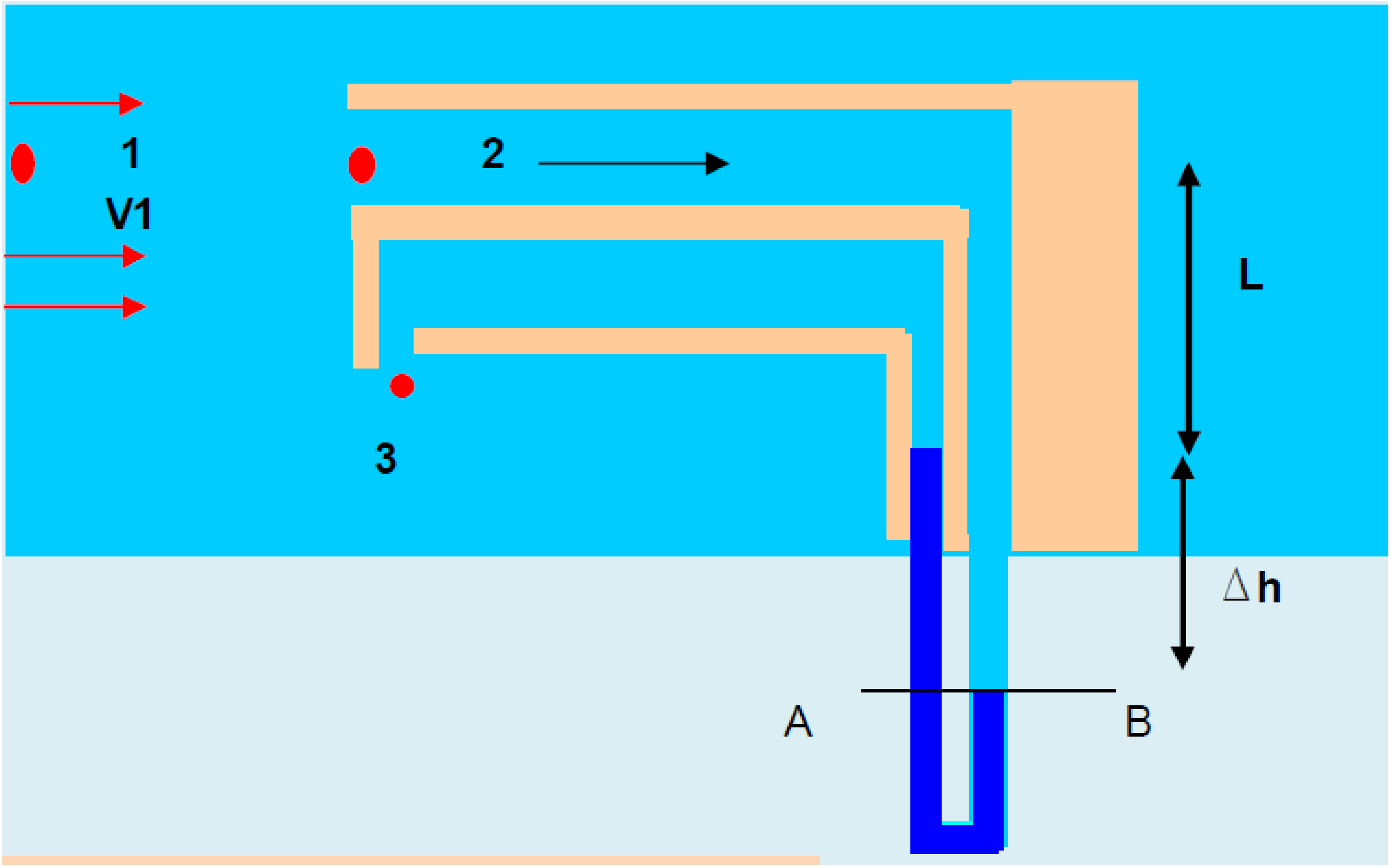
Piezómetro :P. Estática

P dinámica = P estancam. - Pestática

P_2: presión de estancamiento ; $V_2 = 0$

P_3: presión medida en un tubo piezométrico, que no perturba la corriente y mide P estática.

$Z_1 = Z_2 = Z_3$ aprox.



Despreciando pérdidas: $V_3 = V_1$ y $P_3 = P_1$

Aplicando Bernoulli entre 1 y 2, para fluido incompresible:

$$P_1/g + V_1^2 / 2g = P_2 /g$$
$$(P_2 - P_1)/ g = V_1^2 / 2g$$
$$(P_2 - P_1)\, g = rf\, V_1^2 / 2$$

De 2 a 3 al estar el fluido principal y el manométrico en reposo, se puede aplicar la ecuación fundamental de la hidrostática:

$$P_a = P_b$$

$$P_2 + \gamma_f \Delta h + \gamma_f L = P_3 + \gamma_{Hg} \Delta h + \gamma_f L$$

$$P_2 - P_3 = \Delta h (\gamma_{Hg} - \gamma_f)$$

siendo: $P_2 - P_3 = P_2 - P_1$

$$P_{din} = P_{estanca} - P_{estática}$$

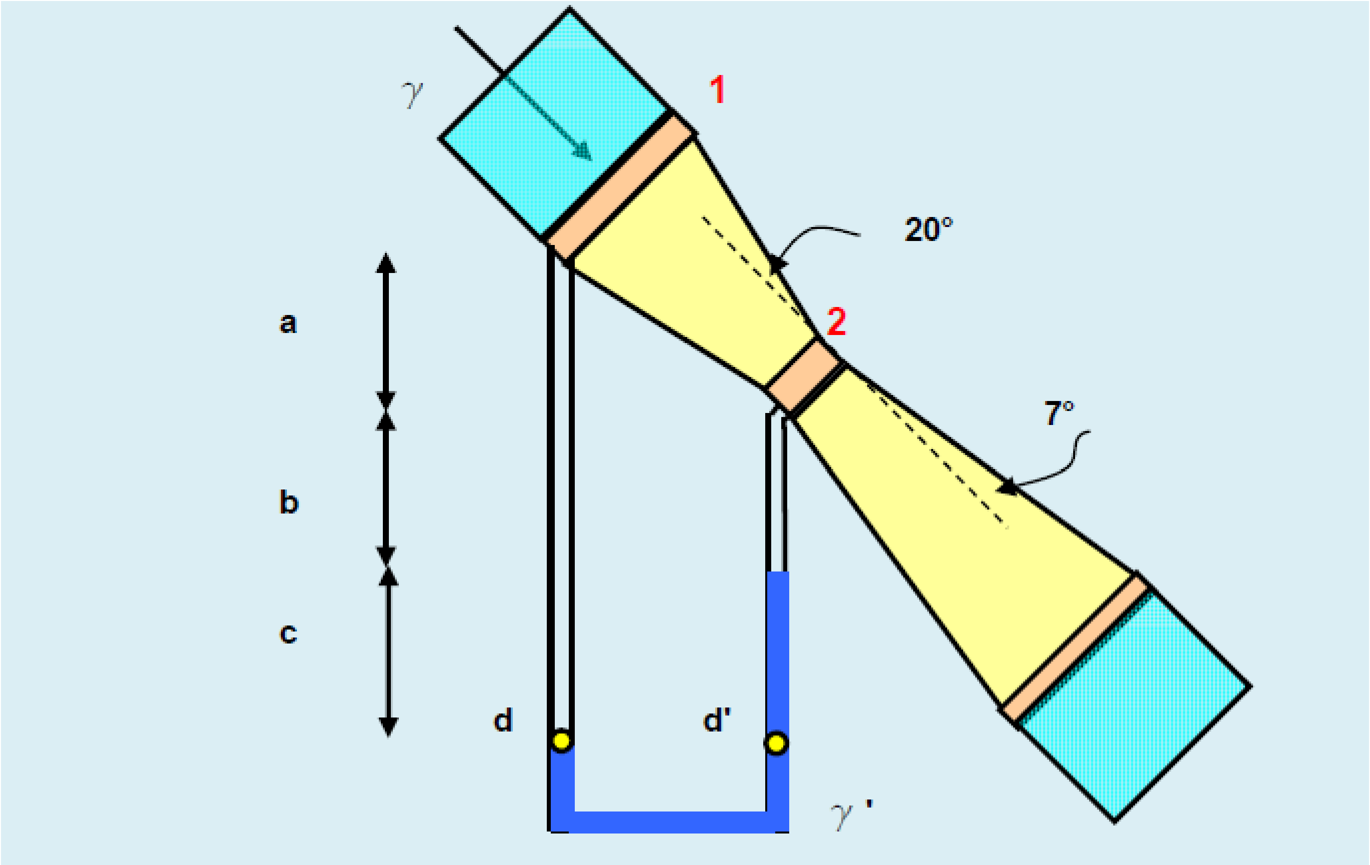
$$P_2 - P_3 = \rho f V_1^2 /2$$

$P_2 - P_3 = \Delta h (\rho_{Hg} - \rho_f)$ Igualando:

$$\rho_f V_1^2 /2 = \Delta h (\rho_{Hg} - \rho_f)$$

$V_{1t} = (2 \Delta h (\gamma_{Hg} - \gamma_f) / \rho_f)^{1/2}$ velocidad teórica de la corriente

TUBO DE VENTURI
Es un dispositivio para medir caudales en tuberías basándose en la ecuación de Bernoulli



En las secciones 1 y 2 tiene orificios piezométricos y se conecta un manómetro con un fluido de peso específico γ'. El fluido que se mueve de 1 a 2 es de peso específico γ

Aplicando Bernoulli entre 1 y 2 y haciendo pasar el plano de referencia por 2:

$$P_1 / \gamma + a + V_1 2 / 2 g = P2 / \gamma + 0 + V_2 2 / 2 g$$

$$(P_1 - P_2) / \gamma + a = (V_2 2 - V_1 2) / 2g$$

Por la ecuación de continuidad:

$A_1 V_1 = A_2 V_2$ $\qquad\qquad$ $V_1 = V_2 A_2 / A_1$

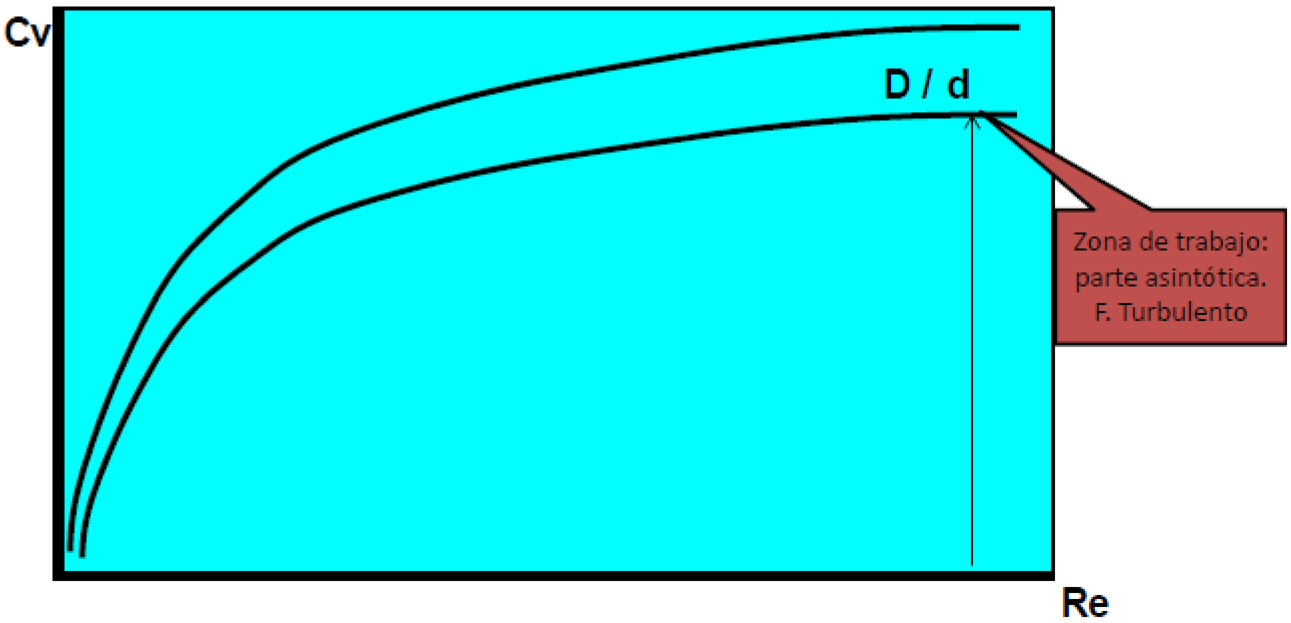
$$(P_1 - P_2) / \gamma + a = V_2{}^2 / 2g [1 - (A_2{}^2 / A_1{}^2)]$$

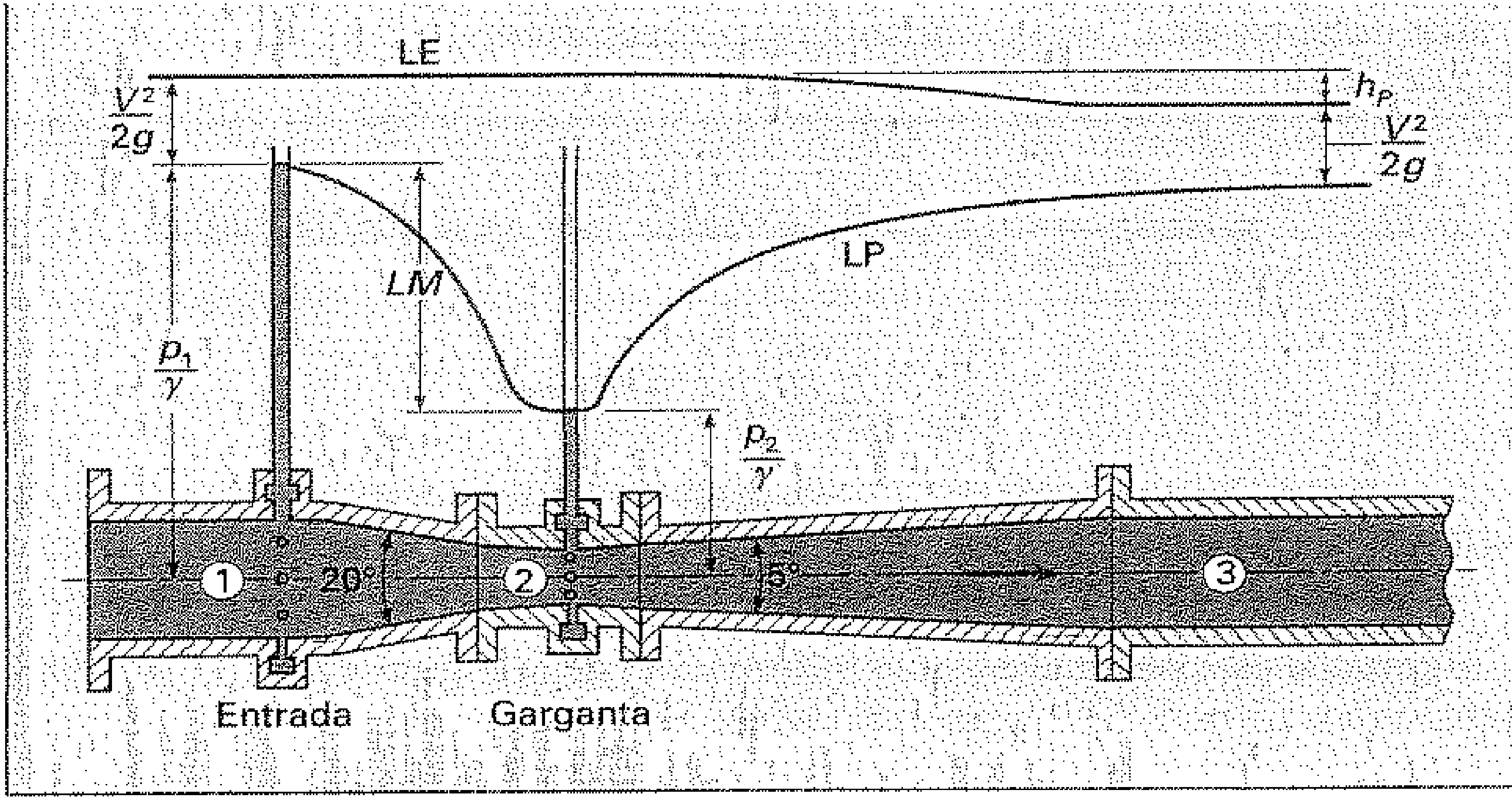
$$V2\,t = \sqrt{\frac{2g\left[\,(P1 - P2)\,/\,\gamma \;+\; a\,\right]}{1 - (A2\,/\,A1)^2}}$$

Es una velocidad teórica, considerando las pérdidas despreciables en el Venturi. No obstante , se tiene en cuenta un coeficiente de corrección Cv, menor que uno , ya que la velocidad real es menor que la teórica. Las pérdidas en el Venturi son menores que en otros dispositivos.

$V_2 r = Cv\ V_{2t}$

Cv : coeficiente de velocidad, función del Nº de Re




LE
$\frac{V^2}{2g}$
h_P
$\frac{V^2}{2g}$
LM
LP
$\frac{p_1}{\gamma}$
$\frac{p_2}{\gamma}$
1
20°
2
5°
3
Entrada
Garganta

Teniendo en cuenta que los puntos d y d' están en la misma masa fluida y a la misma altura:
RESOLVIENDO EL MANÓMETRO EN d y d´

$$P_1 + g\,a + g\,b + g\,c = P_2 + g\,b + g'\,c$$

$$P_1 + (a + c)\,g = P_2 + g'\,c$$

$$P_1 / g + a + c = P_2 / g + g'/g\,c$$

$$(P_1 - P_2) / g + a = g'/g\,c - c$$

$$(P_1 - P_2) / g + a = c\,(g'/g - 1)$$

Reemplazando: En la ec. de $V_{2\,t}$

$$V2\,t = \sqrt{\frac{2g \quad c \quad (\gamma \ / \ \gamma' \ - 1)}{1-(A2 \ / \ A1)^2}}$$

Como el valor de a no figura, para la determinación del caudal es independiente de la posición del Venturi.

$$Q = C_v V_{2\,t} A_2$$

No lleva corrección por Cc

$Cq = Cv / ((1 - (A_2/A_1)^2)^{1/2}$

$Cq = f(Re)$

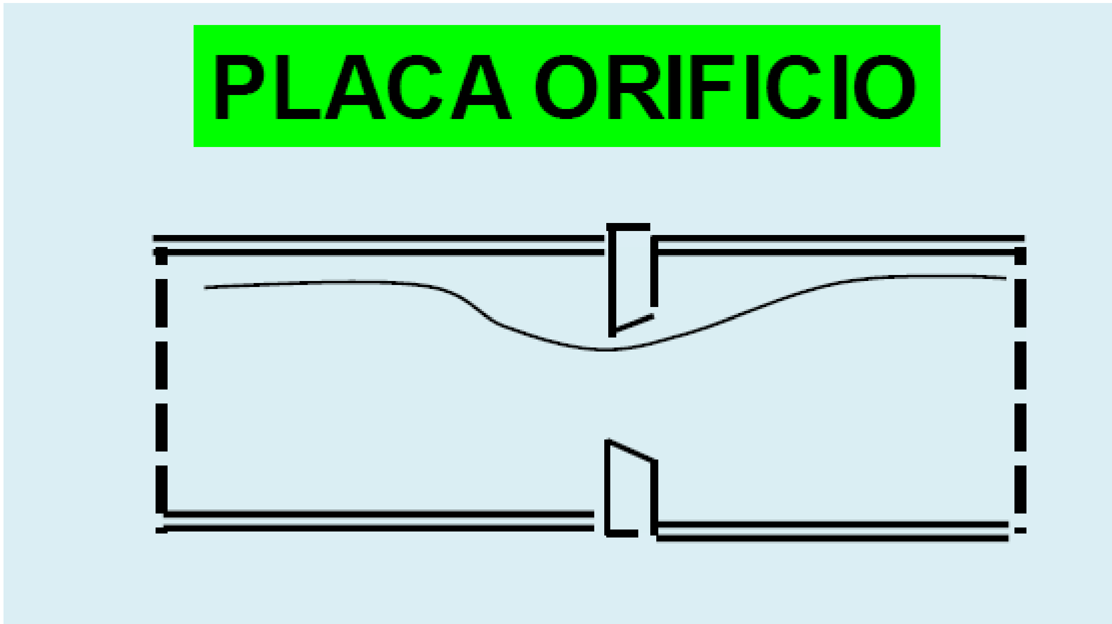
$V_2r = Cq * (2gc (g`/g -1))^{1/2}$

$Qr = V^2r\ A^2$

Ventajas del Venturi : mayor exactitud que otros métodos

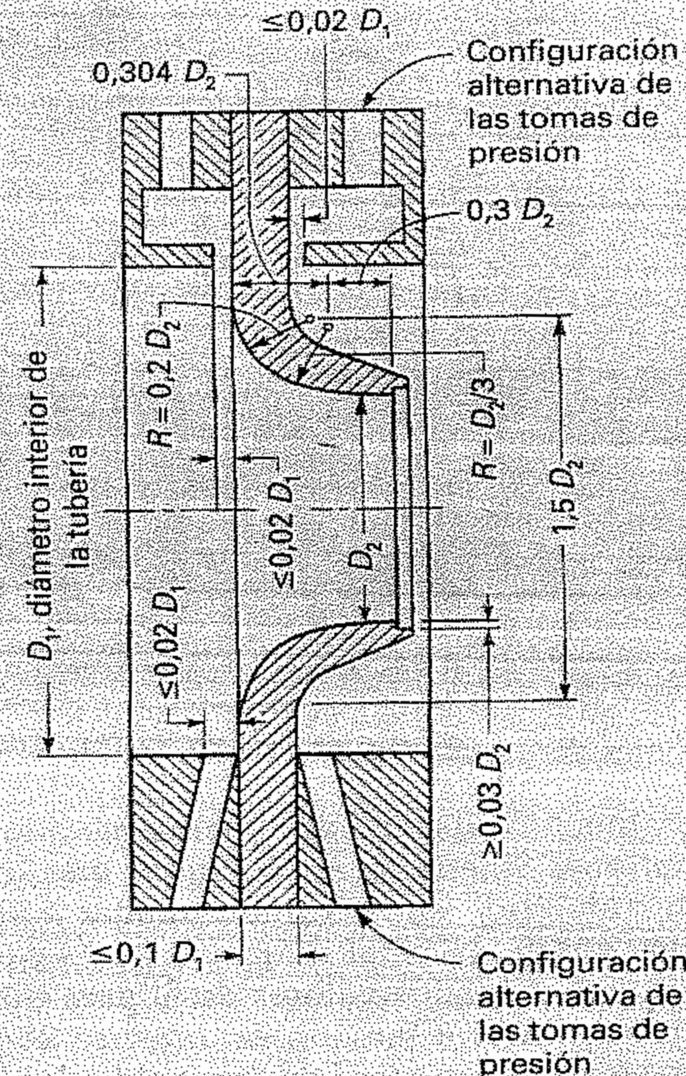
Desventaja : es más caro.

La relación de áreas se puede poner como la relación de diámetros a la cuarta, llamándola con el coeficiente β



Cumple ecuaciones similares a las del Venturi. Es más imprecisa, pero más barata y fácil de usar.

Medidor tobera ISA.



PRINCIPIO DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

FRANZINI CAP 6

Permite determinar las fuerzas que actúan y que se producen porque la velocidad de un fluido cambie de dirección o de magnitud por la acción de un cuerpo. Estas fuerzas son importantes en la ingeniería porque por el principio de acción y reacción una fuerza igual y opuesta es ejercida por el fluido sobre el cuerpo que genera el cambio.

$$\sum \mathbb{F} = \frac{d(m\mathbb{V})_S}{dt} \qquad \sum (\mathbb{F})\, dt = d(m\mathbb{V})_S,$$

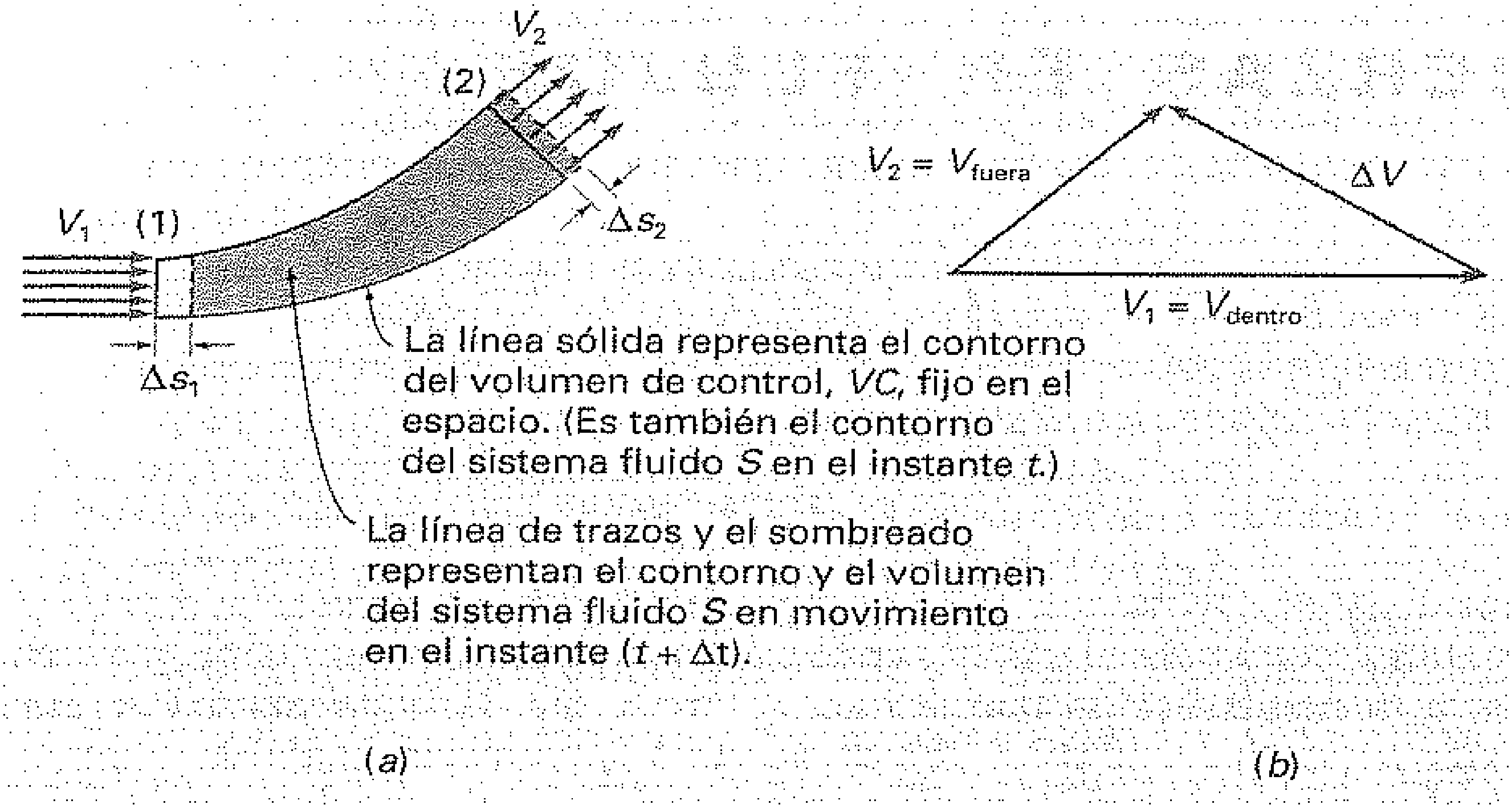
Flujo no estacionario

$$\frac{d(m\mathbb{V})_S}{dt} = \frac{d(m\mathbb{V})_{VC}}{dt} + \frac{d(m\mathbb{V})_{VC}^{\text{fuera}}}{dt} - \frac{d(m\mathbb{V})_{VC}^{\text{dentro}}}{dt}$$

$$\sum \mathbb{F} = \frac{d(m\mathbb{V})_{VC}}{dt} + \frac{d(m\mathbb{V})_{VC}^{\text{fuera}}}{dt} - \frac{d(m\mathbb{V})_{VC}^{\text{dentro}}}{dt}$$

Variación en el tiempo de la cantidad de movimiento volumen de control

Variación en el tiempo de la cantidad de movimiento que entra o sale del volumen de control *a*) Volumen de control para flujo estacionario con la superficie de control cortando una corriente constante a la derecha. *b*) Relaciones de velocidad.



$$\sum \mathbb{F} = \frac{d(m\mathbb{V})_{VC}^{\text{fuera}}}{dt} - \frac{d(m\mathbb{V})_{VC}^{\text{dentro}}}{dt}$$

Hay que seleccionar un volumen de control de manera que la superficie de control sea normal a la velocidad donde corte a la corriente. De esta forma se puede suponer que la velocidad es constante en toda la superficie.

Para el punto 1

$$\frac{d(m\mathbb{V})_1}{dt} = \frac{dm_1}{dt}\mathbb{V}_1 = \dot{m}_1\mathbb{V}_1 = \rho_1 Q_1 \mathbb{V}_1$$

Para el punto 2 se procede de idéntica manera. Para el conjunto

$$\sum \mathbb{F} = \dot{m}_2\mathbb{V}_2 - \dot{m}_1\mathbb{V}_1 = \rho_2 Q_2 \mathbb{V}_2 - \rho_1 Q_1 \mathbb{V}_1$$

Como el caudal másico es constante (no hay variaciones apreciables de densidad y estamos en régimen permanente)

$$\dot{m} = \rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2 = \rho Q.$$

$$\boxed{\sum \mathbb{F} = \dot{m}(\Delta \mathbf{V}) = \rho Q(\Delta \mathbf{V})}$$

La dirección de las sumatorias de fuerzas deben ser iguales a V
Esta sumatoria incluye a todas las fuerzas que actúan: fuerzas derivadas de la presión, de gravedad, fuerzas cortantes tanto las ejercidas por el fluido como las ejercidas por las paredes que rodean al fluido.

$$\boxed{\begin{aligned} \sum F_x &= \dot{m}(\Delta V_x) = \rho Q(\Delta V_x) = \rho Q(V_{2x} - V_{1x}) \\ \sum F_y &= \dot{m}(\Delta V_y) = \rho Q(\Delta V_y) = \rho Q(V_{2y} - V_{1y}) \\ \sum F_z &= \dot{m}(\Delta V_z) = \rho Q(\Delta V_z) = \rho Q(V_{2z} - V_{1z}) \end{aligned}}$$

Si el flujo dentro del tubo de corriente se dividen en varios tubos menores los valores de ρQV se calculan por separado y luego se sustituyen en la ecuación

FACTOR DE CORRECCIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Como la distribución de velocidades no es uniforme en algunos sistemas se aplica un factor de corrección, ya que el uso de la V media produce un pequeño error

Elemento de área diferencia

$(dm/dt)u = (\rho u dA)u = \rho u^2 dA$

$\rho \int u^2 dA$

$\rho QV = \rho AV^2$

$$\boxed{\beta = \frac{1}{AV^2} \int_A u^2 \, dA}$$

Para tubería circular y flujo laminar B = 0,75 pero para flujo turbulento 1,005 < b < 1,05. Para los siguientes estudios B=1

APLICACIONES DEL PRINCIPIO DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Pueden incluir:

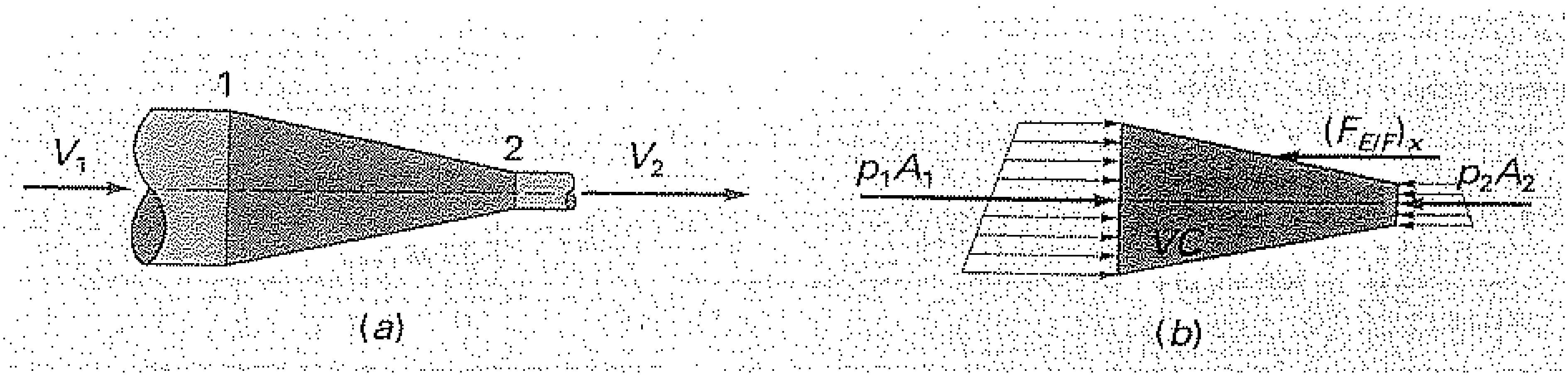
- Fuerzas ejercidas por un fluido en movimiento sobre estructuras abiertas en la atmósfera, tales como compuertas y vertederos

- Fuerzas ejercidas sobre conductos a presión

- Fuerzas ejercidas sobre álabes de turbina

- Fuerzas ejercidas por hélices (molinos, aeronaves)

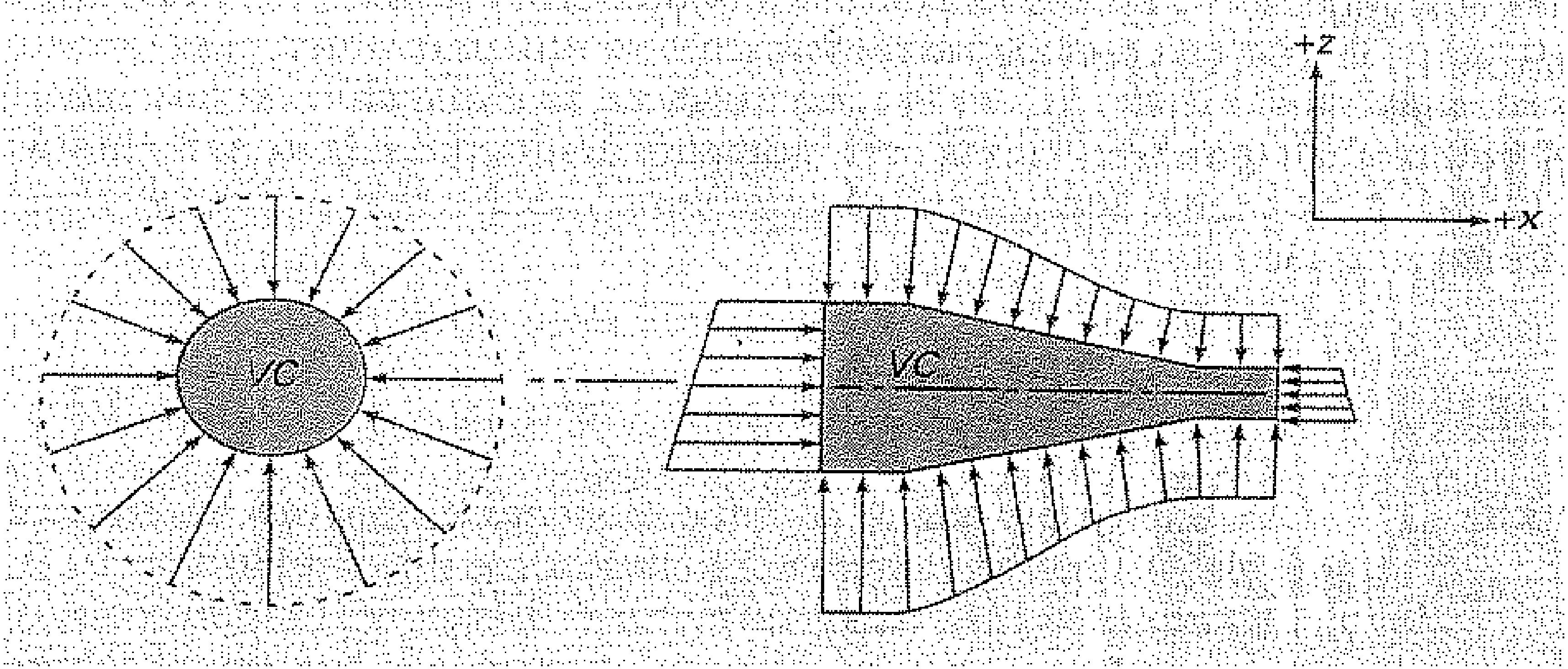
FUERZAS EJERCIDAS SOBRE UN CONDUCTO A PRESIÓN



$$\sum F_x = p_1A_1 - p_2A_2 - (F_{E/F})_x = \rho Q(V_2 - V_1)$$

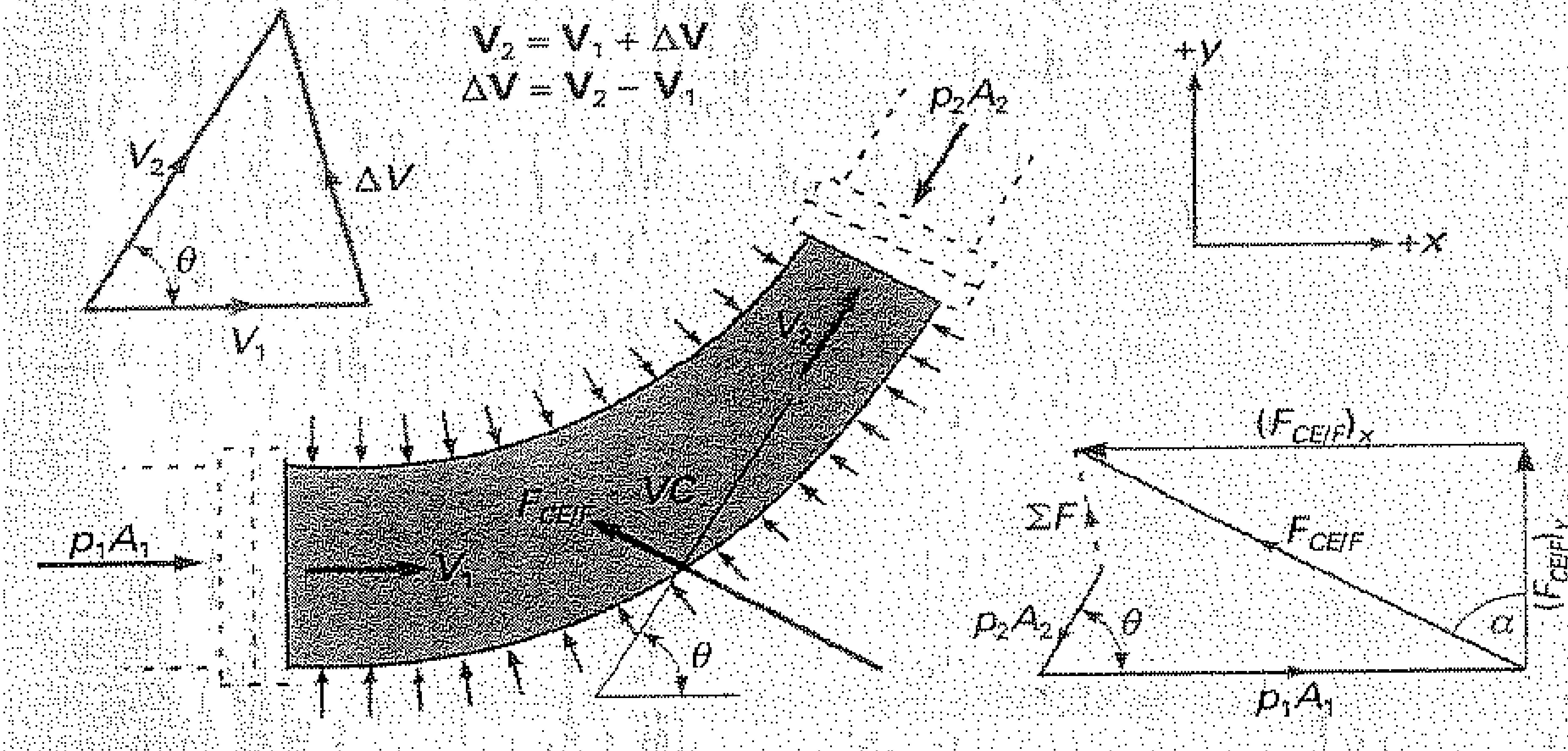
$$(F_{E/F})_x = p_1A_1 - p_2A_2 - \rho Q(V_2 - V_1)$$

Distribución de presiones manométricas sobre el fluido en el reductor.



Un estudio del peso del fluido entre las secciones 1 y 2 llega a la conclusión de que las presiones son mayores en la mitad inferior de la tubería que en la mitad inferior

Fuerzas sobre el fluido en un codo de estrechamiento.



$$\sum F_x = p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos\theta - (F_{CE/F})_x = \rho Q(V_2 \cos\theta - V_1)$$

$$(F_{CE/F})_x = p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos\theta - \rho Q(V_2 \cos\theta - V_1)$$

$$\sum F_y = 0 - p_2 A_2 \operatorname{sen}\theta + (F_{CE/F})_y = \rho Q(V_2 \operatorname{sen}\theta - 0)$$

$$(F_{CE/F})_y = p_2 A_2 \operatorname{sen}\theta + \rho Q V_2 \operatorname{sen}\theta$$

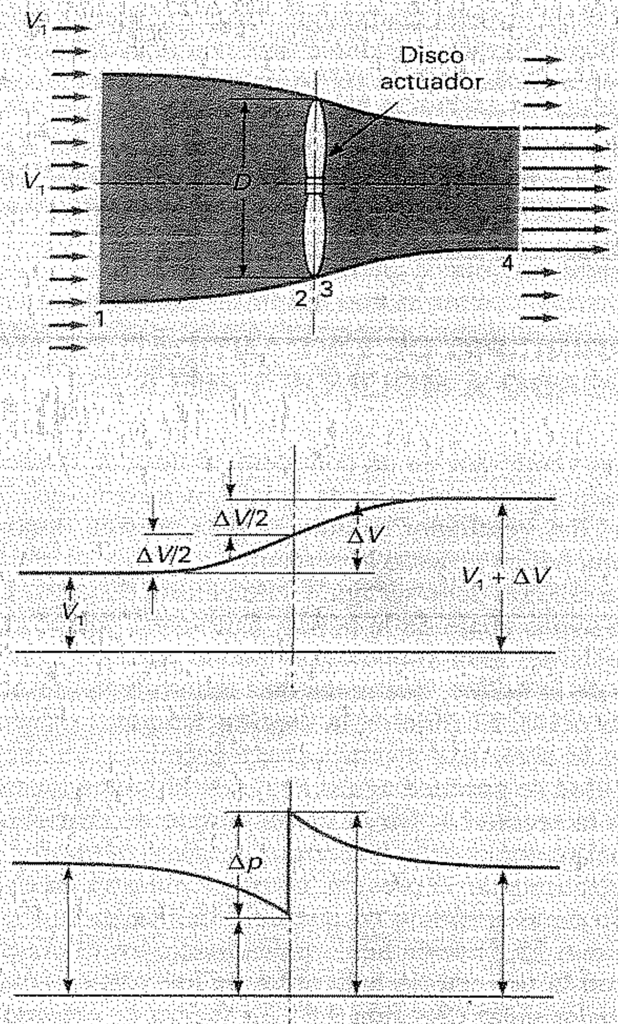
La resultante es la composición geométrica de ambas fuerzas. En este caso nos interesa conocer el resultado de la fuerza que hay que hacer para equilibrar la estructura.

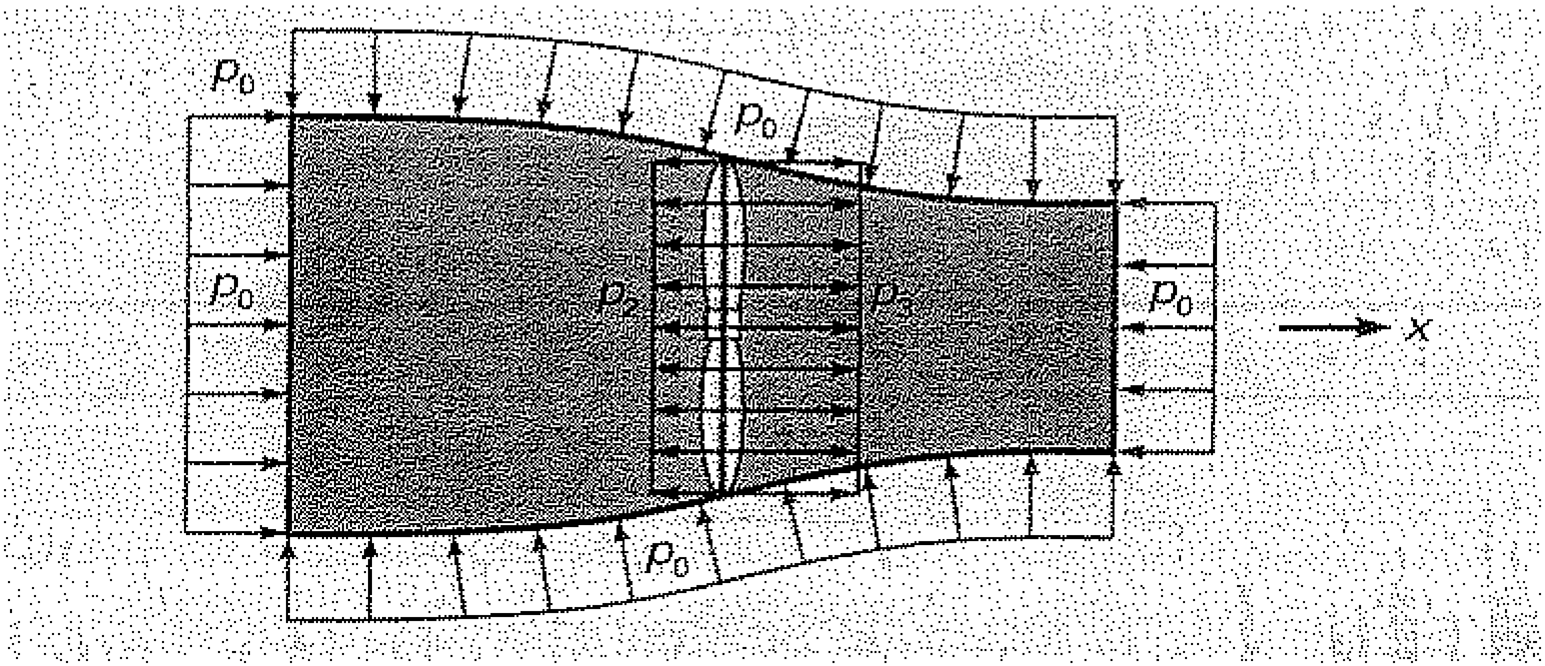
Si la cañería hubiera sido vertical habría que incluir en la sumatoria de fuerzas el peso del fluido.

Si tuviéramos varios entradas o salidas se aplica el principio de superposición de efectos. La expresión sigue siendo válida (Ver Franzini)

APLICACIÓN A MOLINOS Y HÉLICES

La corriente de la hélice en un fluido libre. V_1 representa la velocidad del fluido no perturbado respecto a la hélice; p_0 representa la presión no perturbada del fluido.





$$F_E = \rho Q(\Delta V) = \rho A V(V_4 - V_1)$$

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{(V_1 + \Delta V)^2}{2g}$$

$$Q = A\left(V_1 + \frac{\Delta V}{2}\right)$$

$$Q = A\left(V_1 + \frac{V_4 - V_1}{2}\right) = A\left(\frac{V_1 + V_4}{2}\right) = AV$$