

# FLUJO COMPRESIBLE

Ondas elásticas. Golpe de ariete. Flujo subsónico y supersónico.

## ONDAS ELASTICAS

Si se produce una perturbación en un fluido ésta se manifiesta como una variación de presión que se propaga en el seno del fluido en forma de onda. La velocidad de propagación de la onda elástica es  $C$  o también llamada celeridad.

La velocidad de propagación depende del medio en el cual se produce la perturbación.

Si se somete a un cuerpo a un esfuerzo de compresión, éste no se transmite instantáneamente a todo el cuerpo, sino que la perturbación se propaga a través del cuerpo con una velocidad finita, que depende del módulo de elasticidad volumétrico  $K$  (Ev).

$$K = - dP / ( dV / V ) = dP / ( d\rho / \rho )$$

A medida que avanza la onda se producen variaciones locales de presión. Para definir la velocidad de propagación se considera al sistema estático, o sea, a la velocidad  $V$  se le opone una velocidad  $C$  ( igual ), y al movimiento esencialmente impermanente se lo transforma en permanente y se pueden aplicar las leyes de la aceleración y de la continuidad, para movimiento permanente.

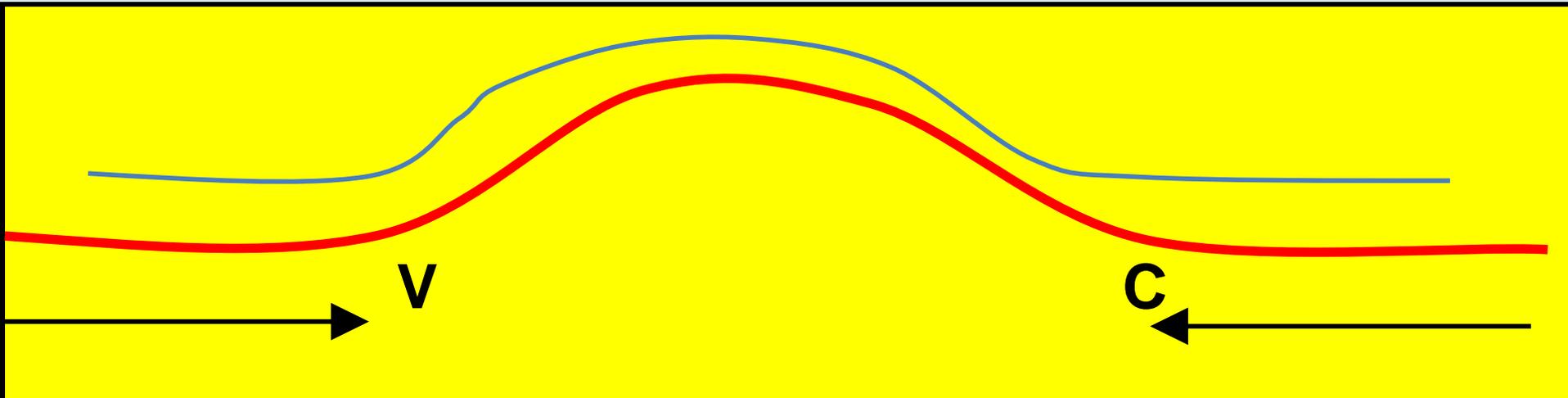
Ley de la aceleración en una dirección:

$$-dP = \rho V dV$$

Ley de continuidad:

Considerando flujo compresible (  $\rho$  )

$$d(\rho V) = 0$$



fluido

D`alembert

$$d\rho V + \rho dV = 0$$

$$dV = (-) dP / \rho V$$

$$dV = (-) V d\rho / \rho$$

$$dP / \rho V = V d\rho / \rho$$

$$V = (dP / d\rho)^{1/2} = C$$

C es la velocidad de propagación de la onda elástica o celeridad de la onda. En función del módulo de elasticidad:

$$dP = K d\rho / \rho$$

$$C = (K / \rho)^{1/2}$$

K: módulo de elasticidad volumétrico

La celeridad depende del módulo de elasticidad volumétrico del medio en el cual se produce la perturbación y de su densidad. El sonido también se propaga en el medio con una velocidad C.

C aire ~ 330 m/s

C agua ~ 1420 m/s

**De la ecuación de una transformación adiabática:**

$$P/\rho^k = \text{cte}$$

**tomando logaritmos:**

$$\ln P - k \ln \rho = \text{cte}$$

**integrando en forma indefinida:**

$$dP/\rho - k d\rho/\rho = 0$$

$$dP/d\rho = k P/\rho$$

$$k = C_p / C_v$$

**Siendo la celeridad de la onda:**

$$C^2 = k * P/\rho$$

$$C = (k * P/\rho)^{1/2}$$

$$C = (k R T)^{1/2}$$

**Lo que indica que la velocidad de propagación de la onda en un fluido depende de la temperatura. depende de la temperatura. A mayor altura las temperaturas son menores, por lo que es menor C y es más fácil superar la velocidad del sonido.**

# FLUJO SUBSONICO Y SUPERSONICO

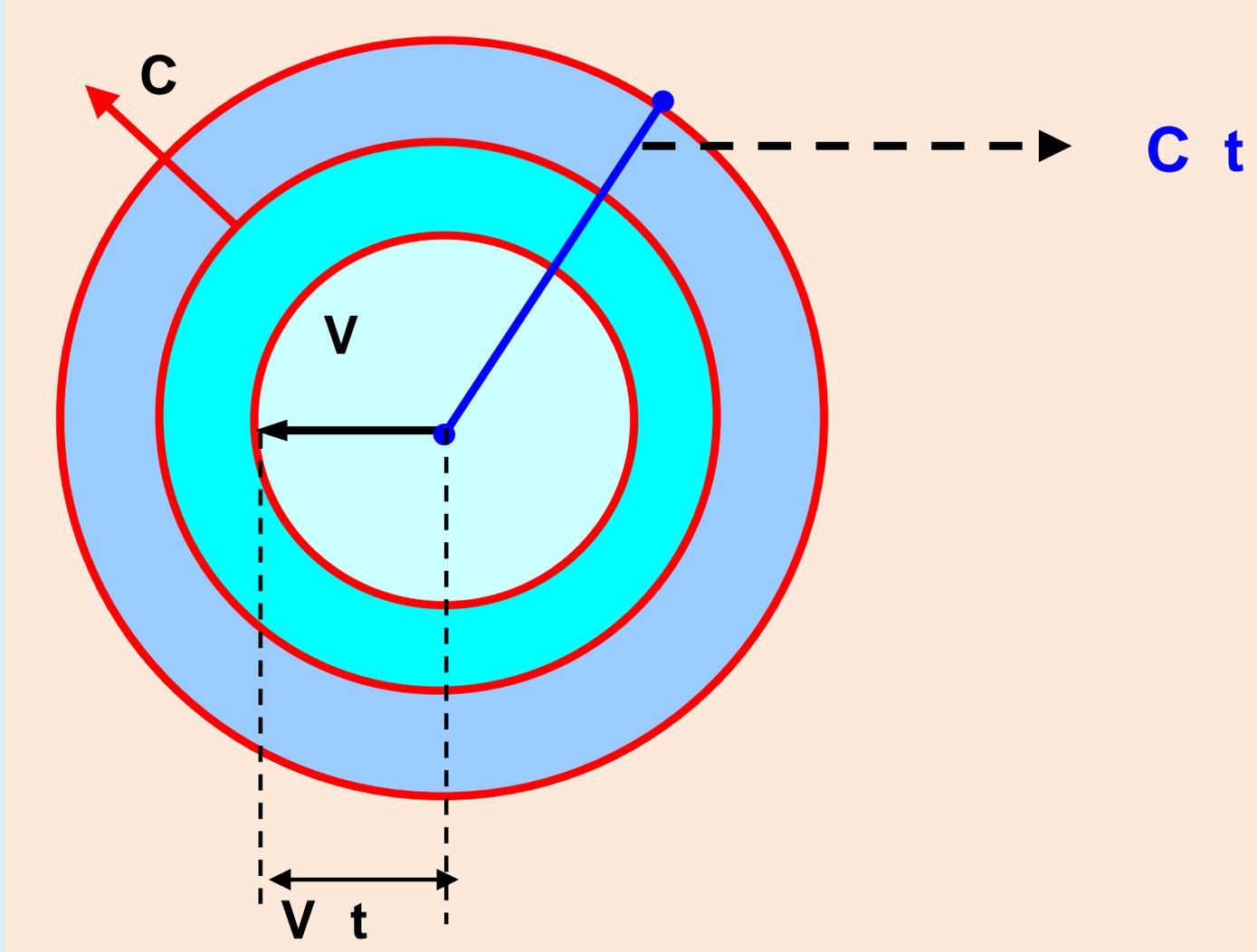
Siendo el número de Mach el cociente entre la velocidad promedio del flujo y la velocidad del sonido.

$$M = V / C$$

Si un objeto se mueve con velocidad  $V < C$ , o sea,  $M < 1$  : flujo subsónico, la perturbación se propaga según ondas esféricas:

$$V < C$$

$$M < 1$$



**Las ondas se alejan del objeto con velocidad  $C > V$ .  
La onda viaja delante del objeto produciendo modificaciones en el medio antes que éste llegue. La onda recorre una distancia  $C t$ , mientras que el objeto recorre  $V t$ .**

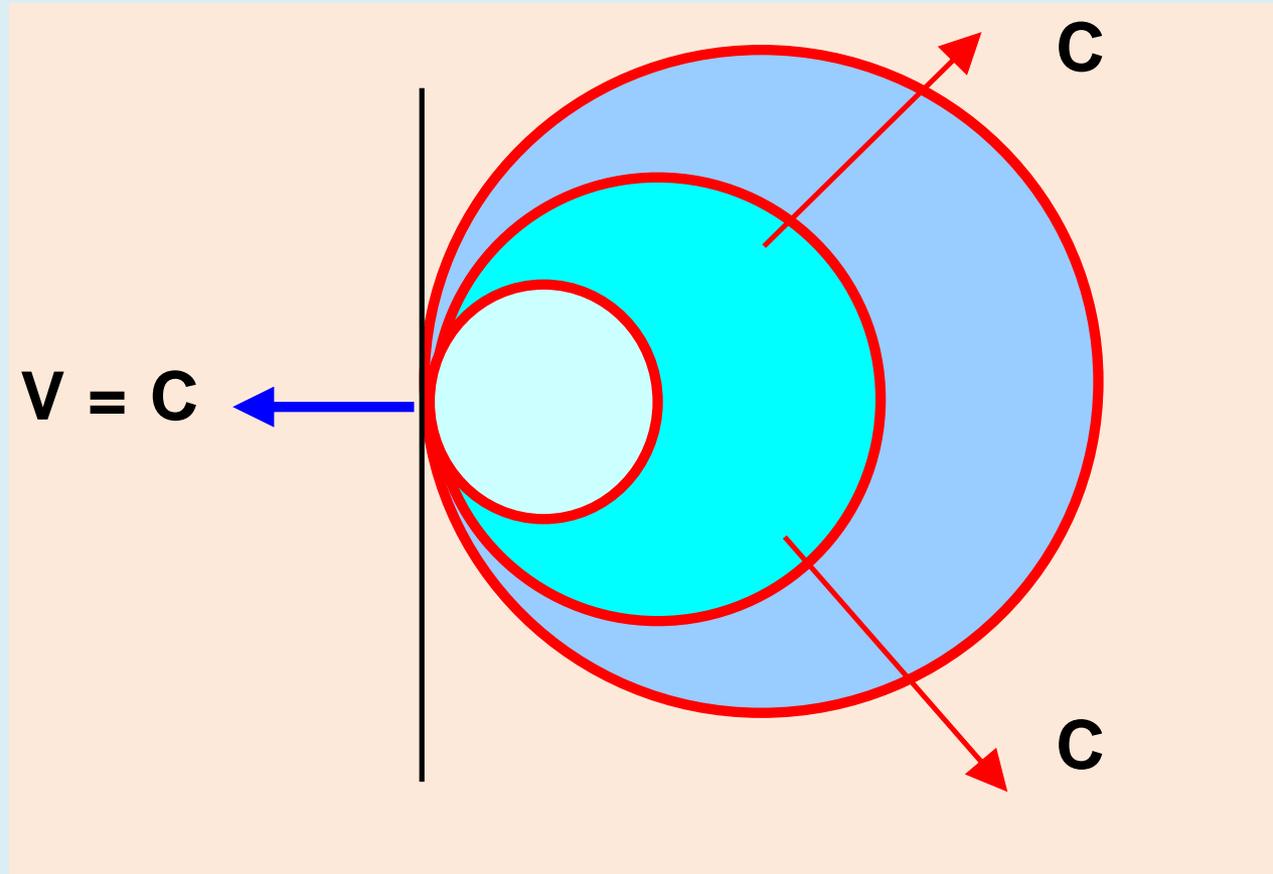
**Si**

$$V = C$$

$$M = 1$$

**Flujo Sónico**

Las ondas no se propagan delante del objeto y se concentran en la proa del mismo.

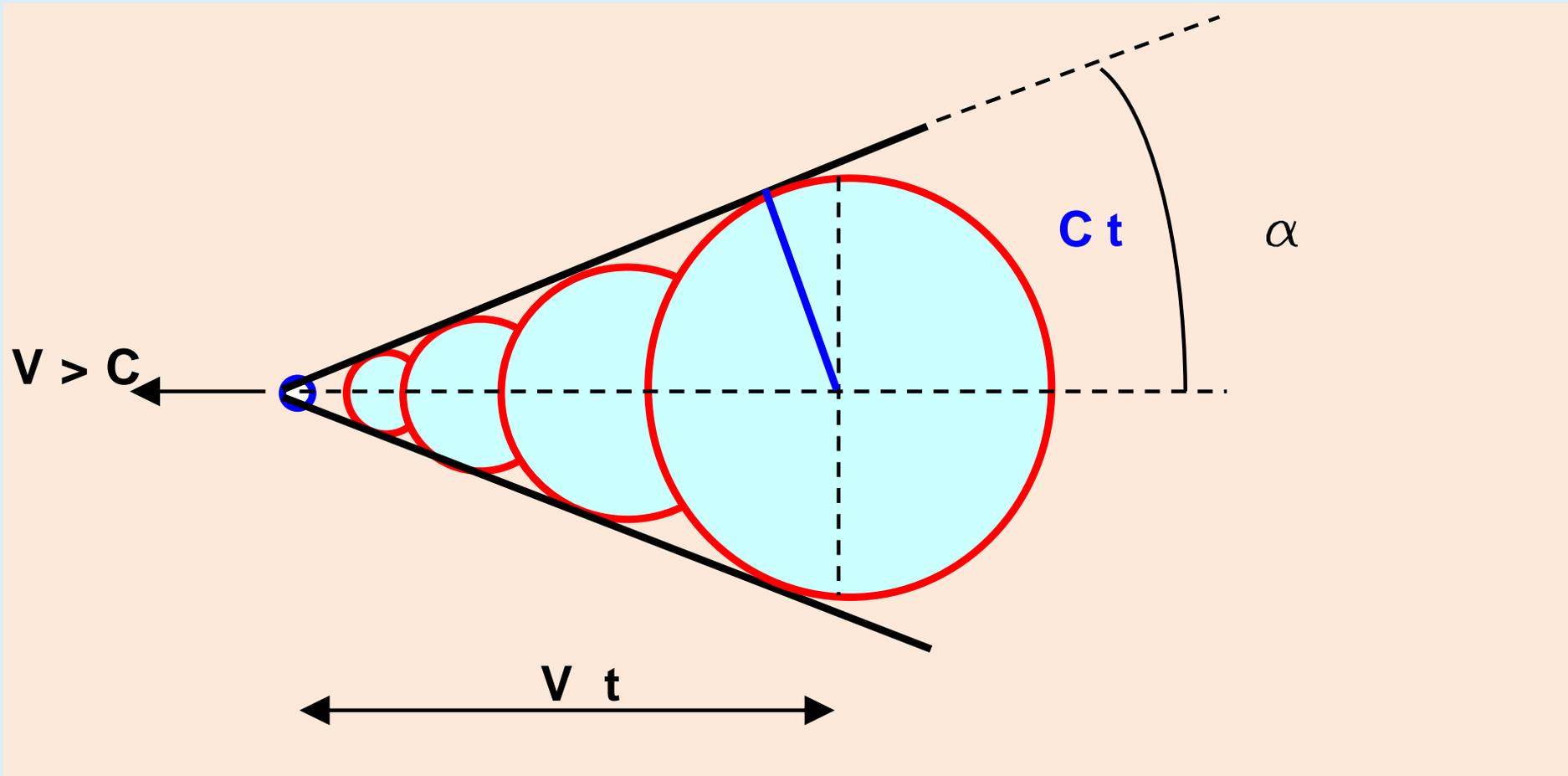


La tangente a los círculos que pasan por el objeto se llama frente de onda u onda de choque porque a través de ella hay un brusco cambio de densidad. Es lo que se llama barrera del sonido.

Si  $V > C$

$M > 1$

Flujo supersónico



El cuerpo se mueve más rápido que las ondas esféricas que emite, produciéndose un frente de onda cónico con vértice en la proa del cuerpo. Las generatrices determinan un cono llamado cono de Mach.

**El ángulo del cono de Mach es:**

$$\mathbf{\text{sen } \alpha = C_t / V_t = 1 / M}$$

**A mayor V, mayor M y menor ángulo.**

**En el flujo subsónico se limita a estudiar la forma del objeto para evitar el desprendimiento de la capa límite, lo cual resulta más determinante en la popa que en la proa.**

**En el movimiento supersónico es a la inversa ya que la proa determina la abertura del cono de Mach, quedando el objeto dentro del mismo.**

# FLUJO ISOENTRÓPICO A TRAVÉS DE TOBERAS

Flujo adiabático y sin rozamiento

No viscoso ( $\mu = 0$ )

La tobera es corta y se considera casi sin rozamiento

Adiabático ( $dQ = 0$ )

Al ser corta, el intercambio es casi nulo

Gas perfecto ( $P/\gamma = RT$ )

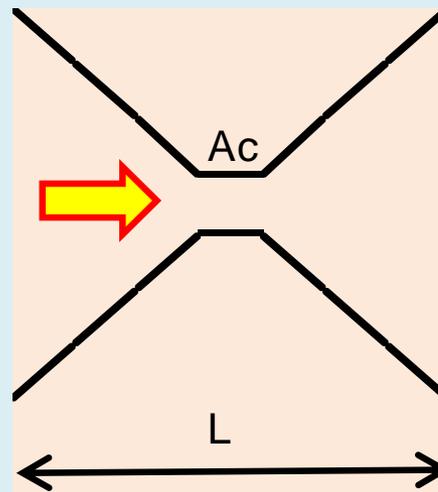
Cumple ecuación Gas Ideal. El rendimiento es cercano a 100%

Permanente ( $\delta / \delta t = 0$ )

Las propiedades no varían con el tiempo

Unidimensional

En la dirección X



Aplicando Bernoulli en forma genérica:

$$\int dP/\rho + gZ + V^2/2 = \text{Cte}$$

Diferenciando:

$$dP/\rho + V dV = 0$$

$$C^2 d\rho/\rho + V dV = 0$$

Despejando  $d\rho/\rho$  en ambas ecuaciones:

$$d\rho/\rho = -V dV/C^2$$

$$d\rho/\rho = -(dV/V + dA/A)$$

$$dA/A = dV (V/C^2 - 1/V)$$

$$dAV = AV (V^2/C^2 - 1)$$

$$dA/dV = AV (M^2 - 1)$$

Se desprecian las variaciones de Z

Siendo:

$$C = (dP/d\rho)^{1/2}$$

$$dP = C^2 d\rho$$

Por la ecuación de continuidad:

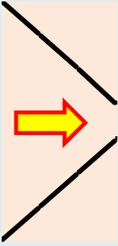
$$\rho V A = \text{Cte}$$

Diferenciando:

$$d\rho/\rho + dV/V + dA/A = 0$$

## Flujo subsónico:

$$\text{Si } M = V/C < 1$$

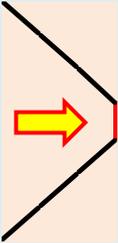


$dA/dV$  es negativo, lo que significa que el área y la velocidad varían en forma opuesta

A menor sección, mayor velocidad.

## Flujo sónico:

$$M = V/C = 1$$

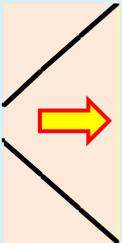


$dA/dV = 0$ , significa que hay un máximo o un mínimo

Máxima velocidad para área mínima

## Flujo supersónico:

$$M = V/C > 1$$



$dA/dV$  es positivo. El área varía en igual sentido que la velocidad

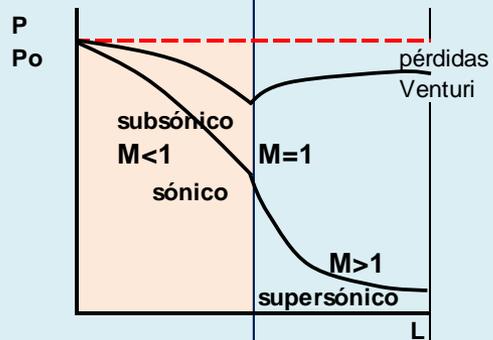
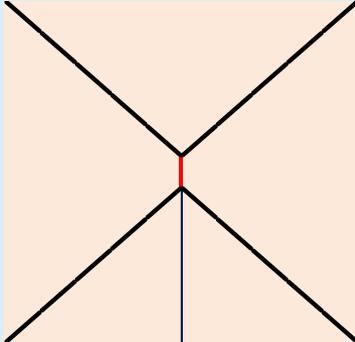
La sección aumenta y la velocidad aumenta

**A partir de un fluido en reposo, para alcanzar velocidades supersónicas la tobera debe ser convergente –divergente.**

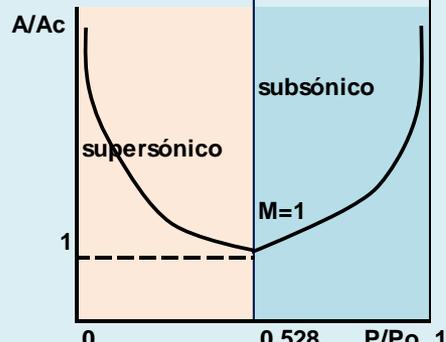
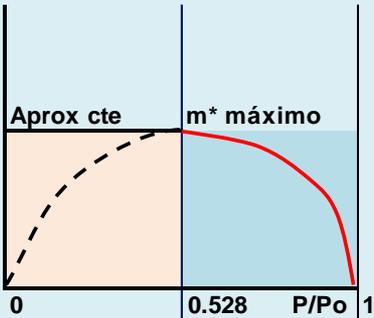
**La velocidad máxima es la del sonido en el área crítica, cuando se alcanza la velocidad crítica**

**Si se deja  $P_0 = \text{cte}$  a la entrada de la tobera y se comienza a disminuir la presión a la salida (P), se puede ir analizando qué ocurre con las distintas variables**

**Considerando una tobera convergente-divergente o tobera “de Laval”:**



$\rho V$  Caudal másico por unidad de sección



## Expresiones útiles

$$c = \sqrt{k \cdot R \cdot T}$$

$$Ma = \frac{v}{c}$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{Ma}\right)$$

$$h_0 - \left(h + \frac{v^2}{2}\right) = 0$$

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{1 + \left[\frac{(k-1)}{2}\right] \cdot Ma^2}$$

$$p \cdot \rho \cdot T = p_0 \cdot \rho_0 \cdot T_0$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left[\frac{1}{1 + \left[\frac{(k-1)}{2}\right] \cdot Ma^2}\right]^{\frac{1}{k-1}}$$

$$\frac{p}{p_0} = \left[\frac{1}{1 + \left[\frac{(k-1)}{2}\right] \cdot Ma^2}\right]^{\frac{k}{k-1}}$$

$$Ma := 1$$

*velocidad del sonido para gas ideal*

*número de Mach*

*ángulo del cono de Mach*

*entalpía en el punto de estancamiento*

*temperatura de un gas ideal en cualquier punto de un conducto convergente/divergente para flujo isentrópico en función de  $T_0$  de estancamiento*

*ecuación de estado*

*ecuación de evolución adiabática*

*densidad de un gas ideal en cualquier punto de un conducto convergente/divergente para flujo isentrópico en función de  $\rho_0$  de estancamiento*

*presión de un gas ideal en cualquier punto de un conducto convergente/divergente para flujo isentrópico en función de  $p_0$  de estancamiento*

*Para  $Ma=1$  se tiene los valores críticos de  $\rho^*$ ,  $p^*$  y  $T^*$*

### Problema 1

Un avión que vuela a 2000 m de altitud pasa directamente por arriba de un observador. Si el avión se desplaza a un número de Mach igual a 1,5 y la temperatura ambiente es 10°C, ¿cuántos segundos tiene que esperar el observador antes de escuchar el sonido producido por el avión?

$$T := (10 + 273.15)K \quad k = \frac{c_p}{c_v} \quad k := 1.401 \quad Ma := 1.5$$

$$z := 2000m$$

$$c := \sqrt{k \cdot R \cdot T} \quad c = 337.359 \frac{m}{s}$$

$$v := Ma \cdot c$$

$$\alpha := \arcsin\left(\frac{1}{Ma}\right)$$

$$d := \frac{z}{\tan(\alpha)} \quad d = v \cdot t$$

$$t := \frac{d}{v}$$

$$t = 4.419 s$$

T =	10	273	283	°K
k = Cp/Cv	kaire=		1,410	
M =			1,5	
z =		2.000		m
c =			338	m/s
$c = (k \cdot Rpart \cdot Tabs)^{1/2}$				

$P v = R T \quad v = 1/ \rho$				
R = cte particular del gas				
R = P v/ T	N m	N/m2	m3/Kgmasa	1/°K
	Kgmasa °K	N		m3
				1,000
		m2	Kgmasa	°K
aire:	PM	Rpart(Nm/kgmasa°K)	k = Cp/Cv	
	29	287	1,410	
		$m^2 / seg^2 \cdot °K$		

$\alpha = \arcsin(1/M)$	
$\alpha =$	0,72973      41,8
$\tan \alpha =$	0,894
$dist = Z / \tan \alpha$	$d = V \cdot t$
$d =$	2.236,1      m
$t = d/V =$	4,405      seg

c =	338	m/s
V = M * c =	507,616	m/s
1/M =	0,667	

## Problema 2

Por un conducto convergente pasa aire de manera estable de condiciones atmosféricas normales hasta un tubo receptor. El área mínima de la sección transversal de flujo en la garganta del conducto convergente es  $1 \cdot 10^{-4} \text{m}^2$ . determinar el caudal másico a través del ducto si la presión en el receptor es a) 80 kPa (abs) b) 40 kPa (abs). Trazar diagramas temperatura entropía para los casos y compararlos.

$$G_m = \rho_{\text{garganta}} \cdot A_{\text{garganta}} \cdot v_{\text{garganta}}$$

$$p_0 := 1 \text{ atm} \quad T_0 := (15 + 273.15) \text{ K} \quad \text{parámetros de estancamiento}$$

$$\rho_0 := 1.23 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad A_g := 10^{-4} \cdot \text{m}^2$$

El aire evolucionará subsónico por el conducto. Para un valor de presión en la garganta igual a la presión crítica se tendrá  $Ma=1$  en la garganta. Para un valor inferior, la velocidad no puede ser mayor en un conducto convergente por lo que la presión en la garganta sigue siendo la presión crítica. Para una presión superior a la crítica, el valor de  $Ma < 1$ .

Luego es útil conocer la presión crítica:

$$p_c := p_0 \cdot \left[ \frac{1}{1 + \left[ \frac{(k-1)}{2} \right] \cdot 1} \right]^{\frac{k}{k-1}}$$
$$p_c = 53.511 \text{ kPa} \quad \frac{p_c}{p_0} = 0.52811$$

a) 80 kPa  
entonces, de acuerdo a lo expresado

$p_g := 80 \text{ kPa}$       presión en la garganta

$$p_g = p_0 \left[ \frac{1}{1 + \left[ \frac{(k-1)}{2} \right] \cdot \text{Ma}^2} \right]^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\text{Ma} = 0.591$$

nº Mach en la garganta

$$T_g := \frac{T_0}{1 + \left[ \frac{(k-1)}{2} \right] \cdot \text{Ma}^2}$$

$$T_g = 269.305 \text{ K}$$

Temperatura en la garganta

$$c_g := \sqrt{k \cdot R \cdot T_g}$$

$$c_g = 329.008 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

velocidad del sonido en la garganta

$$v_g := \text{Ma} \cdot c_g$$

$$v_g = 194.368 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

velocidad en la garganta

$$\rho_g := \rho_0 \left[ \frac{1}{1 + \left[ \frac{(k-1)}{2} \right] \cdot \text{Ma}^2} \right]^{\frac{1}{k-1}}$$

$$\rho_g = 1.039 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

densidad en la garganta

luego, el caudal másico

$$G_m := \rho_g \cdot A_g \cdot v_g$$

$$G_m = 0.0202 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

b)  $p=40$  kPa valor menor que el crítico, entonces

$$p_g := p_c$$

$$p_g = p_0 \cdot \left[ \frac{1}{1 + \left[ \frac{(k-1)}{2} \right] \cdot Ma^2} \right]^{\frac{k}{k-1}}$$

$$Ma = 1$$

*nº Mach en la garganta*

$$T_g := \frac{T_0}{1 + \left[ \frac{(k-1)}{2} \right] \cdot Ma^2}$$

$$T_g = 240.025 \text{ K}$$

*Temperatura en la garganta*

$$c_g := \sqrt{k \cdot R \cdot T_g}$$

$$c_g = 310.608 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

*velocidad del sonido en la garganta*

$$v_g := Ma \cdot c_g$$

$$v_g = 310.608 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

*velocidad en la garganta*

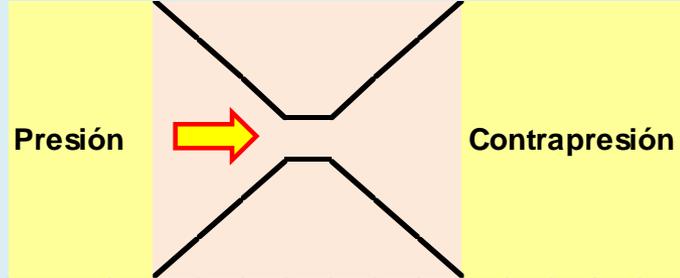
$$\rho_g := \rho_0 \cdot \left[ \frac{1}{1 + \left[ \frac{(k-1)}{2} \right] \cdot Ma^2} \right]^{\frac{1}{k-1}}$$

$$\rho_g = 0.78 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

*luego, el caudal másico*

$$G_m := \rho_g \cdot A_g \cdot v_g$$

$$G_m = 0.0242 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$



$$G_m = \rho g \cdot A_g \cdot v_g$$

P0=	1	atm =	0,10133 K Pa	101.325
T0=	288,15	°K	parámetros de estancamiento	
$\rho_0 =$	1,23	Kg/m3		
A <sub>g</sub> =	0,0001	m2		
k=	1,401			

Pa=1 atm  
101.325

El aire evoluciona subsónico por el conducto. Para un valor de presión en la garganta igual a la presión crítica se tendrá  $M=1$  en la garganta. Para un valor inferior, la velocidad no puede ser mayor en un conducto convergente por lo que la presión en la garganta sigue siendo la presión crítica. Para una presión superior a la crítica, el valor de  $M>1$ . Luego, es útil conocer la presión crítica:

$$P_c = P_0 \left\{ \frac{1}{1 + \left\{ \frac{(k-1)}{2} \right\} \cdot 1} \right\}^{k/k-1}$$

1,201
0,833
0,528

$$P_c = 53,51 \text{ kPa}$$

$$P_c/P_0 = 0,528$$

a) 80 kPa en la garganta

$P_g = 80 \text{ kPa}$

$$P_g = P_0 \left\{ \frac{1}{1 + \left\{ \frac{(K-1)}{2} \right\} * M^2} \right\}^{k/k-1}$$

$(k-1)/2$	0,2005	101,3 kPa/atm
$P_g/P_0 =$	0,7895	
$k/(k-1)$	3,4938	
	0,9346	
	0,7895	
$M_g =$	0,591	

$$T_g = T_0 / (1 + \left\{ \frac{(k-1)}{2} \right\} * M^2)$$

$T_g = 269,304 \text{ } ^\circ\text{K}$

$$C_g = (k * R_{part} * T_g \text{ abs})^{1/2}$$

$C_g = 329,1 \text{ m/s}$

$V_g = M * C_g = 194,405 \text{ m/s}$

$$\rho_g = \rho_0 (1 / ((1 + ((k-1)/2) * M^2))^{1/(k-1)})$$

	1,069978845
	0,934597917
$1/(k-1) =$	2,494
$\rho_g =$	1,039 Kg masa/m3

Caudal másico :

$$G_m = \rho_g * A_g * V_g$$

$G_m = 0,0202 \text{ Kg/s}$

b)  $p = 40 \text{ kPa}$  , valor menor que el crítico, entonces:

$P_g = P_c$

$$P_g = P_0 \left\{ \frac{1}{1 + \left\{ \frac{(K-1)}{2} \right\} * M^2} \right\}^{k/k-1}$$

$$P_c = P_0 \left\{ \frac{1}{1 + \left\{ \frac{(K-1)}{2} \right\} * 1} \right\}^{k/k-1}$$

M en la garganta:

$M_g = 1$

$$T_g = T_0 / (1 + \left\{ \frac{(k-1)}{2} \right\} * M^2)$$

$T_g = 240,02 \text{ } ^\circ\text{K}$

$$C_g = (k * R_{part} * T_g \text{ abs})^{1/2}$$

velocidad del sonido en la garganta

$C_g = 310,662 \text{ m/s}$

$V_g = M * C_g = 310,662 \text{ m/s}$

$$\rho_g = \rho_0 (1 / ((1 + ((k-1)/2) * M^2))^{1/(k-1)})$$

	1,201
	0,833
	0,634
$\rho_g =$	0,780 Kg/m3

Caudal másico:

$$G_m = \rho_g * A_g * V_g$$

$G_m = 0,0242 \text{ Kg/s}$

### Problema 3

Aire proveniente de la atmósfera normal entra subsónicamente y fluye isentrópicamente a través de un conducto convergente-divergente estrangulado cuya área de sección transversal circular,  $A$ , varía con la distancia axial a la garganta según:  $A = 0.1 + x^2$

donde  $A$  está en metros cuadrados y  $x$  en metros. el ducto se extiende desde  $x=-0.5\text{m}$  hasta  $x=0.5\text{m}$ . Para esta situación de flujo, trazar la vista lateral del ducto y graficar la variación del número de Mach, la razón de la temperatura a la temperatura de estancamiento  $T/T_0$ , y la razón de la presión estática a la presión de estancamiento  $p/p_0$ , a través del ducto desde  $x=-0.5\text{m}$  hasta  $x=0.5\text{m}$ .

$$A = \pi r^2$$

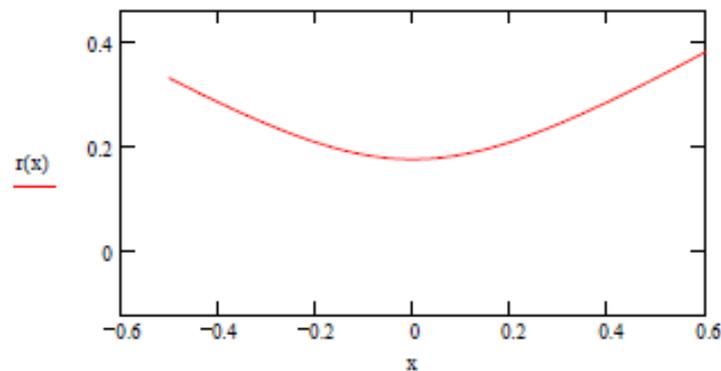
$$A(x) := 0.1 + x^2$$

$$r(x) := \sqrt{\frac{A(x)}{\pi}}$$

$$T_0 := (15 + 273.15)\text{K} \quad \rho_0 := 1.23 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad \text{condiciones normales}$$

$$p_0 := 1\text{atm}$$

Vista lateral del conducto:



En un conducto convergente divergente donde el flujo se haya estrangulado ( $p_{\text{garganta}} = p_{\text{critica}}$ , el área de la garganta es donde se dan las condiciones críticas, y además, por condición de flujo constante a la largo del conducto se cumple:

$$\rho \cdot A \cdot v = \rho_g \cdot A_g \cdot v_g$$

$$A_g := A(0) \text{ m}^2$$

$$\rho_c := \rho_0 \cdot \left[ \frac{1}{1 + \left[ \frac{(k-1)}{2} \right]} \right]^{\frac{1}{k-1}}$$

valor crítico de la densidad

$$\rho_g := \rho_c \quad \rho_g = 0.78 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$T_c := \frac{T_0}{1 + \left[ \frac{(k-1)}{2} \right]}$$

$$T_g := T_c \quad T_g = 240.025 \text{ K}$$

$$c_g := \sqrt{k \cdot R \cdot T_g} \quad c_g = 310.608 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_g := c_g$$

Luego el caudal másico vale:

$$G_m := \rho_g \cdot A_g \cdot v_g$$

$$G_m = 24.222 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

$$\text{se cumple: } \frac{A}{A_c} = \left( \frac{\rho_c}{\rho} \right) \cdot \left( \frac{c}{v} \right)$$

con lo que dada la relación entre las áreas se puede tener el valor del número de Mach para una evolución isentrópica a lo largo del conducto.

$$\frac{A}{A_c} = \frac{1}{\text{Ma}} \left[ \frac{1 + \left( \frac{k-1}{2} \right) \cdot \text{Ma}^2}{1 + \frac{k-1}{2}} \right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

Se tendrá Mach en función del área que a su vez está en función de  $x$ . Por facilidad en el cálculo, conviene tomar valores discretos de  $x$  (pej  $x: -0.5, -0.4, \dots, 0.6$ ) y luego sus correspondientes áreas en el conducto. Se puede resolver numéricamente la ecuación anterior

$$\text{ej: } x := -0.4 \quad A_1 := A(x) \quad A_g := A(0)$$

$$A_1 = 0.26 \quad A_g = 0.1$$

$\text{Ma} := 0.1$  se propone una solución menor que 1 ya que en el conducto convergente no hay flujo supersónico.

$$\frac{0.26}{0.1} = \frac{1}{\text{Ma}} \left[ \frac{1 + \left( \frac{k-1}{2} \right) \cdot \text{Ma}^2}{1 + \frac{k-1}{2}} \right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

$$\text{Ma} = 0.23$$

$$T := \frac{T_0}{1 + \left[ \frac{(k-1)}{2} \right] \cdot Ma^2} \quad T = 285.134 \text{ K} \quad \frac{T}{T_0} = 0.99$$

$$p := p_0 \cdot \left[ \frac{1}{1 + \left[ \frac{(k-1)}{2} \right] \cdot Ma^2} \right]^{\frac{k}{k-1}} \quad p = 97.668 \text{ kPa} \quad \frac{p}{p_0} = 0.964$$

*¿Qué ocurre para secciones por encima de la crítica? Pueden suceder 2 soluciones. Una, es que el flujo sea subsónico en el conducto divergente. El valor de la presión será mayor que la presión en la garganta y como consecuencia el flujo se desacelerará resultando simétrico respecto a la parte convergente. Otra solución es que el flujo sea supersónico y continúe acelerándose en el conducto.*

*Por ejemplo, para la posición  $x=+0.4 \text{ m}$ ,*

$$A(0.4) = 0.26$$

$Ma := 2$       *se propone una solución  $Ma > 1$  por la hipótesis de flujo supersónico*

$$\frac{0.26}{0.1} = \frac{1}{Ma} \cdot \left[ \frac{1 + \left( \frac{k-1}{2} \right) \cdot Ma^2}{1 + \frac{k-1}{2}} \right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

$$Ma = 2.486$$

$$T := \frac{T_0}{1 + \left[ \frac{(k-1)}{2} \right] \cdot Ma^2} \quad T = 128.687 \text{ K} \quad \frac{T}{T_0} = 0.447$$

$$p := p_0 \cdot \left[ \frac{1}{1 + \left[ \frac{(k-1)}{2} \right] \cdot Ma^2} \right]^{\frac{k}{k-1}} \quad \frac{p}{p_0} = 0.06$$

*Realizando lo anterior para varios puntos se puede graficar lo pedido. Es de destacar que lo calculado en todos los casos corresponde a comportamiento isentrópico.*

¿Qué ocurre para secciones por encima de la crítica? Pueden suceder 2 soluciones. Una, es que el flujo sea subsónico en el conducto divergente. El valor de la presión será mayor que la presión en la garganta y como consecuencia el flujo se desacelerará resultando simétrico respecto a la parte convergente. Otra solución es que el flujo sea supersónico y continúe acelerándose en el conducto.

Por ejemplo, para la posición  $x=+0.4$  m,

$$A(0.4) = 0.26$$

$Ma := 2$  se propone una solución  $Ma > 1$  por la hipótesis de flujo supersónico

$$\frac{0.26}{0.1} = \frac{1}{Ma} \cdot \left[ \frac{1 + \left( \frac{k-1}{2} \right) \cdot Ma^2}{1 + \frac{k-1}{2}} \right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

$$Ma = 2.486$$

$$T := \frac{T_0}{1 + \left[ \frac{(k-1)}{2} \right] \cdot Ma^2}$$

$$T = 128.687 \text{ K}$$

$$\frac{T}{T_0} = 0.447$$

$$P := P_0 \cdot \left[ \frac{1}{1 + \left[ \frac{(k-1)}{2} \right] \cdot Ma^2} \right]^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{P}{P_0} = 0.06$$

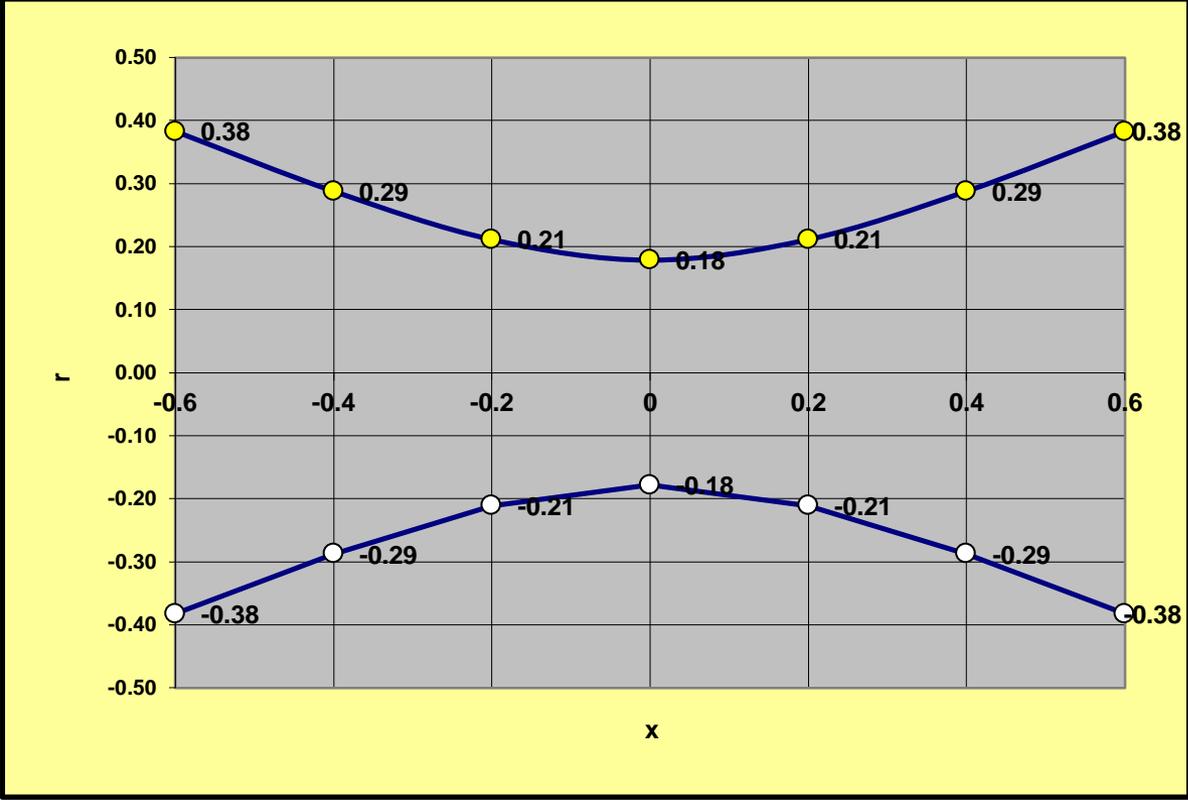
Realizando lo anterior para varios puntos se puede graficar lo pedido.

Es de destacar que lo calculado en todos los casos corresponde a comportamiento isentrópico.

Vista lateral del ducto:

x	r	A		
-0,6	0,38	0,46	-	0,38
-0,4	0,29	0,26	-	0,29
-0,2	0,21	0,14	-	0,21
0	0,18	0,1	-	0,18
0,2	0,21	0,14	-	0,21
0,4	0,29	0,26	-	0,29
0,6	0,38	0,46	-	0,38

$A = \pi r_2^2$   
 $T_o = 288,15 \text{ } ^\circ\text{K}$   
 $\rho_o = 1,23 \text{ Kg/m}^3$   
 $P_o = 1 \text{ atm}$   
 $r(x) = (A(x) / \pi)^{1/2}$



En un conducto convergente-divergente donde el flujo se haya estrangulado (pgarganta=pcrítica), el área de la garganta es donde se dan las condiciones críticas, además, por condición de flujo constante a lo largo del conducto, se cumple:

$$\rho \cdot A \cdot V = \rho_g \cdot A_g \cdot V_g$$

$$A_g = A(o) \text{ m}^2$$

$$\rho_c = \rho_o \left( \frac{1}{1 + \left( \frac{k-1}{2} \right) M^2} \right)^{1/(k-1)} \quad M^2 = 1$$

$$\rho_c = \rho_o \left( \frac{1}{1 + \left( \frac{k-1}{2} \right)} \right)^{1/(k-1)} \quad \text{valor crítico de la densidad}$$

1,201

0,832986256

2,493765586

$$\rho_c = \rho_g = 0,78 \quad \text{Kg/m}^3$$

$$T_g = T_o / \left( 1 + \left( \frac{k-1}{2} \right) M^2 \right) \quad M = 1$$

1,2005

$$T_g = T_c = 240,025 \text{ °K}$$

$$C_g = (k \cdot R_{part} \cdot T_g \text{ abs})^{1/2}$$

$$V_g = C_g = 310,662 \quad \text{m/s}$$

$$G_m = \rho_g \cdot A_g \cdot V_g$$

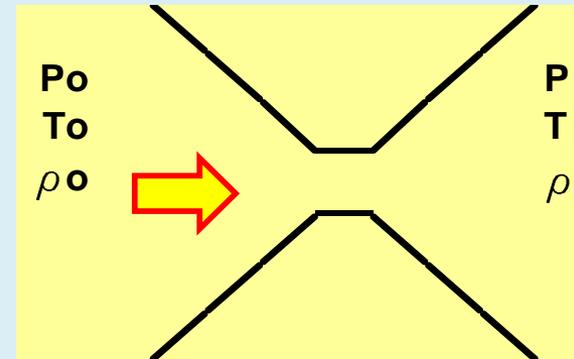
$$G_m = 24,226 \quad \text{Kg/s}$$

Se cumple que:

$$A / A_c = (\rho_c / \rho) \cdot (C / V)$$

con lo que dada la relación entre áreas se puede tener el valor del M para una evolución isoentrópica a lo largo del conducto.

$$A/A_c = 1/M \cdot \left\{ \frac{1 + \left( \frac{k-1}{2} \right) M^2}{1 + (k-1)/2} \right\}^{(k+1)/2(k-1)}$$

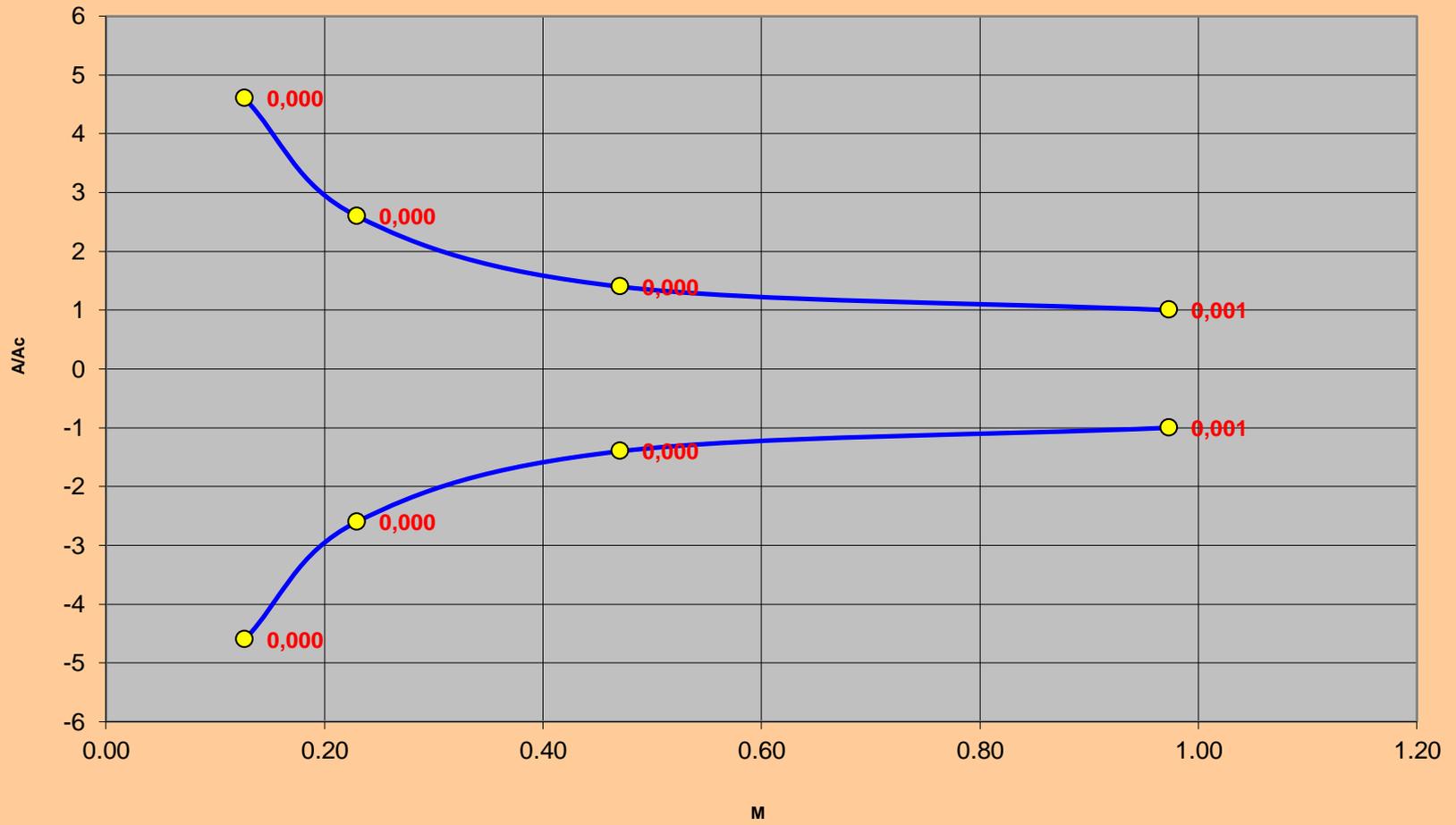


Se tendrá M en función del área que a su vez está en función de x. Por facilidad en el cálculo conviene tomar valores discretos de x (ej: -0.5;-0.4;.....; 0.6) y luego sus correspondientes áreas en el conducto. Se puede resolver numéricamente la ecuación anterior

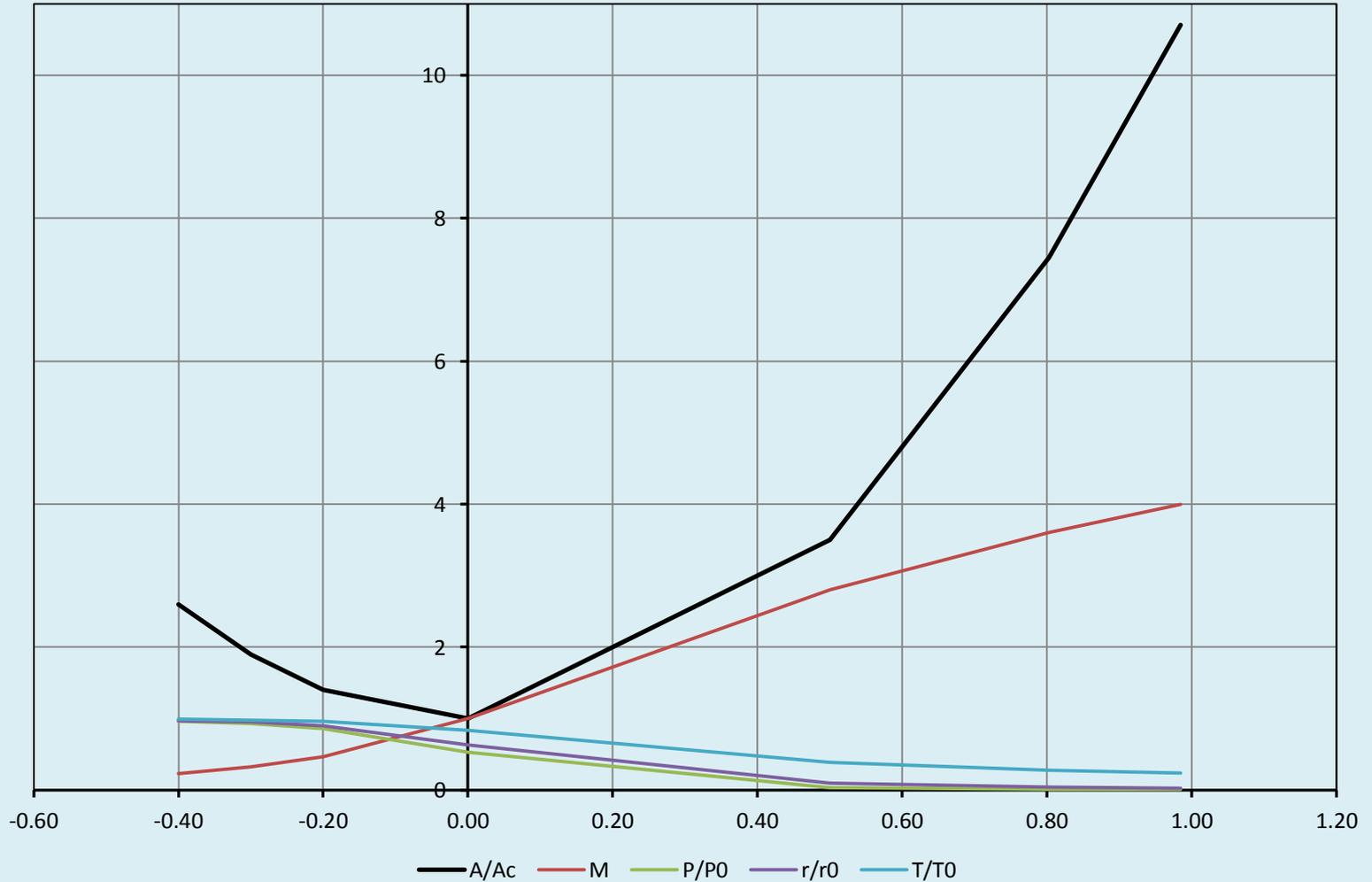
Ej:		se propone una solución menor que 1 ya que en el conducto convergente no hay flujo supersónico.
A/Ac	M	
4,600	0,127	
2,600	0,230	
1,400	0,470	
1,000	0,973	
1,400	0,471	
2,600	0,230	
4,600	0,127	

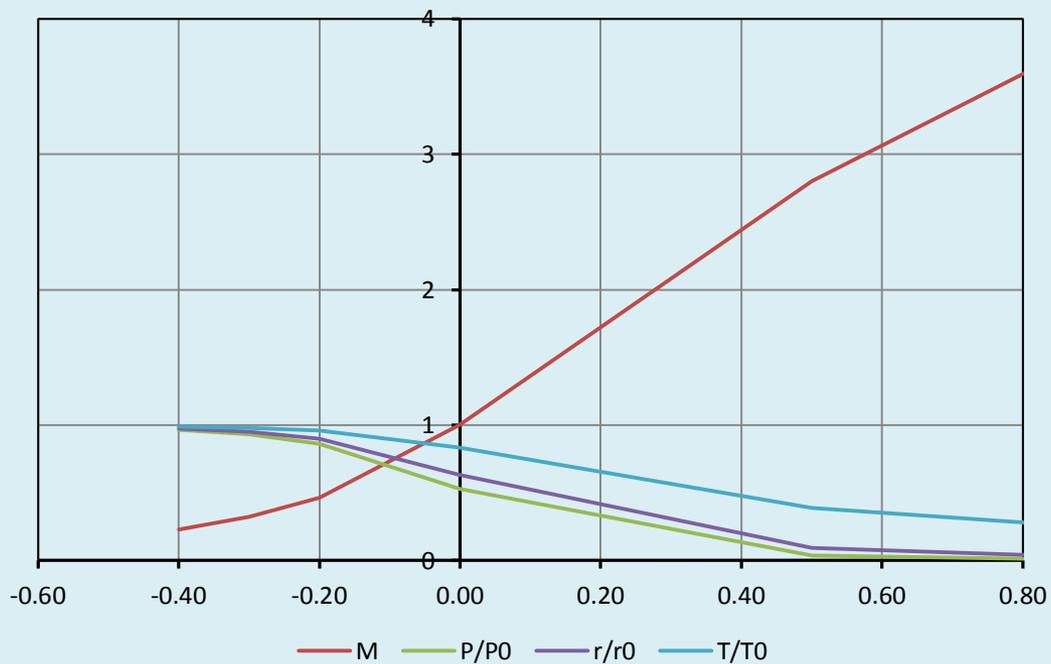
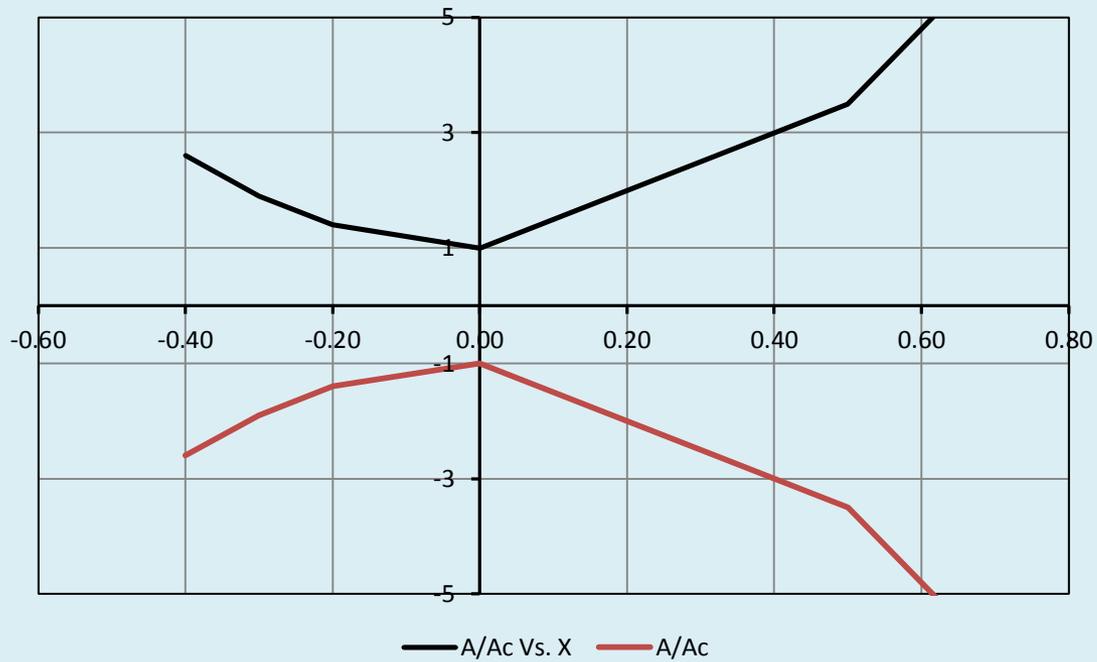
x	A1 = A(x)	Ag = A(0)	A/Ac	1/M	$((k-1)/2)*M^2$	$1+(k-1)/2*M^2$	$(1+(k-1)/2)$	$(k+1)/(2(k-1))$	A/Ac
-0,6	0,46	0,1	4,60	7,9	0,0032	1,00323	1,201	2,994	4,6000
-0,4	0,26	0,1	2,60	4,4	0,0106	1,01057	1,201	2,994	2,6003
-0,2	0,14	0,1	1,40	2,1	0,0444	1,04438	1,201	2,994	1,4007
0	0,1	0,1	1,00	1,028	0,1898	1,18980	1,201	2,994	1,0006
0,2	0,14	0,1	1,40	2,1	0,0444	1,04441	1,201	2,994	1,4003
0,4	0,26	0,1	2,60	4,4	0,0106	1,01057	1,201	2,994	2,6002
0,6	0,46	0,1	4,60	7,9	0,0032	1,00323	1,201	2,994	4,6004

A/Ac	M
4,600	0,127
2,600	0,230
1,400	0,470
1,000	0,973
- 1,000	0,973
- 1,400	0,470
- 2,600	0,230
- 4,600	0,127



	<b>x</b>	<b>A/Ac</b>	<b>M</b>	<b>A/A*</b>	<b>P/P0</b>	<b>r/r0</b>	<b>T/T0</b>
-	0.40	2.60	0.230	2.600	0.965	0.973	0.9895
-	0.30	1.90	0.321	1.900	0.931	0.950	0.979
-	0.20	1.40	0.463	1.400	0.863	0.900	0.958
	0	1.00	1.000	1.000	0.528	0.632	0.833
	0.50	3.50	2.800	3.500	0.037	0.095	0.389
	0.80	7.45	3.600	7.448	0.011	0.041	0.278
	0.99	10.70	4.000	10.702	0.007	0.028	0.238





**Tabla B.5**  
**Relaciones isentrópicas unidimensionales**

M	$A/A^*$	$p/p_0$	$\rho/\rho_0$	$T/T_0$	M	$A/A^*$	$p/p_0$	$\rho/\rho_0$	$T/T_0$
0.00		1.000	1.000	1.000	1.02	1.00	0.516	0.623	0.828
0.01	57.87	0.9999	0.9999	0.9999	1.04	1.00	0.504	0.613	0.822
0.02	28.94	0.9997	0.9999	0.9999	1.06	1.00	0.492	0.602	0.817
0.04	14.48	0.999	0.999	0.9996	1.08	1.01	0.480	0.592	0.810
0.06	9.67	0.997	0.998	0.999	1.10	1.01	0.468	0.582	0.805
0.08	7.26	0.996	0.997	0.999	1.12	1.01	0.457	0.571	0.799
0.10	5.82	0.993	0.995	0.998	1.14	1.02	0.445	0.561	0.794
0.12	4.86	0.990	0.993	0.997	1.16	1.02	0.434	0.551	0.788
0.14	4.18	0.986	0.990	0.996	1.18	1.02	0.423	0.541	0.782
0.16	3.67	0.982	0.987	0.995	1.20	1.03	0.412	0.531	0.716
0.18	3.28	0.978	0.984	0.994	1.22	1.04	0.402	0.521	0.771
0.20	2.96	0.973	0.980	0.992	1.24	1.04	0.391	0.512	0.765
0.22	2.71	0.967	0.976	0.990	1.26	1.05	0.381	0.502	0.759
0.24	2.50	0.961	0.972	0.989	1.28	1.06	0.371	0.492	0.753
0.26	2.32	0.954	0.967	0.987	1.30	1.07	0.361	0.483	0.747
0.28	2.17	0.947	0.962	0.985	1.32	1.08	0.351	0.474	0.742
0.30	2.04	0.939	0.956	0.982	1.34	1.08	0.342	0.464	0.736
0.32	1.92	0.932	0.951	0.980	1.36	1.09	0.332	0.455	0.730
0.34	1.82	0.923	0.944	0.977	1.38	1.10	0.323	0.446	0.724
0.36	1.74	0.914	0.938	0.975	1.40	1.11	0.314	0.437	0.718
0.38	1.66	0.905	0.931	0.972	1.42	1.13	0.305	0.429	0.713
0.40	1.59	0.896	0.924	0.969	1.44	1.14	0.297	0.420	0.707
0.42	1.53	0.886	0.917	0.966	1.46	1.15	0.289	0.412	0.701
0.44	1.47	0.876	0.909	0.963	1.48	1.16	0.280	0.403	0.695
0.46	1.42	0.865	0.902	0.959	1.50	1.18	0.272	0.395	0.690
0.48	1.38	0.854	0.893	0.956	1.52	1.19	0.265	0.387	0.684
0.50	1.34	0.843	0.885	0.952	1.54	1.20	0.257	0.379	0.678
0.52	1.30	0.832	0.877	0.949	1.56	1.22	0.250	0.371	0.672
0.54	1.27	0.820	0.868	0.945	1.58	1.23	0.242	0.363	0.667
0.56	1.24	0.808	0.859	0.941	1.60	1.25	0.235	0.356	0.661
0.58	1.21	0.796	0.850	0.937	1.62	1.27	0.228	0.348	0.656
0.60	1.19	0.784	0.840	0.933	1.64	1.28	0.222	0.341	0.650
0.62	1.17	0.772	0.831	0.929	1.66	1.30	0.215	0.334	0.645
0.64	1.16	0.759	0.821	0.924	1.68	1.32	0.209	0.327	0.639
0.66	1.13	0.747	0.812	0.920	1.70	1.34	0.203	0.320	0.634
0.68	1.12	0.734	0.802	0.915	1.72	1.36	0.197	0.313	0.628
0.70	1.09	0.721	0.792	0.911	1.74	1.38	0.191	0.306	0.623
0.72	1.08	0.708	0.781	0.906	1.76	1.40	0.185	0.300	0.617
0.74	1.07	0.695	0.771	0.901	1.78	1.42	0.179	0.293	0.612
0.76	1.06	0.682	0.761	0.896	1.80	1.44	0.174	0.287	0.607
0.78	1.05	0.669	0.750	0.891	1.82	1.46	0.169	0.281	0.602
0.80	1.04	0.656	0.740	0.886	1.84	1.48	0.164	0.275	0.596
0.82	1.03	0.643	0.729	0.881	1.86	1.51	0.159	0.269	0.591
0.84	1.02	0.630	0.719	0.876	1.88	1.53	0.154	0.263	0.586
0.86	1.02	0.617	0.708	0.871	1.90	1.56	0.149	0.257	0.581
0.88	1.01	0.604	0.698	0.865	1.92	1.58	0.145	0.251	0.576
0.90	1.01	0.591	0.687	0.860	1.94	1.61	0.140	0.246	0.571
0.92	1.01	0.578	0.676	0.855	1.96	1.63	0.136	0.240	0.566
0.94	1.00	0.566	0.666	0.850	1.98	1.66	0.132	0.235	0.561
0.96	1.00	0.553	0.655	0.844	2.00	1.69	0.128	0.230	0.556
0.98	1.00	0.541	0.645	0.839	2.02	1.72	0.124	0.225	0.551
1.00	1.00	0.528	0.632	0.833	2.04	1.75	0.120	0.220	0.546

2.06	1.78	0.116	0.215	0.541	2.66	3.06	0.046	0.110	0.414
2.08	1.81	0.113	0.210	0.536	2.68	3.12	0.044	0.108	0.410
2.10	1.84	0.109	0.206	0.531	2.70	3.18	0.043	0.106	0.407
2.12	1.87	0.106	0.201	0.526	2.72	3.24	0.042	0.103	0.403
2.14	1.90	0.103	0.197	0.522	2.74	3.31	0.040	0.101	0.400
2.16	1.94	0.100	0.192	0.517	2.76	3.37	0.039	0.099	0.396
2.18	1.97	0.097	0.188	0.513	2.78	3.43	0.038	0.097	0.393
2.20	2.01	0.094	0.184	0.508	2.80	3.50	0.037	0.095	0.389
2.22	2.04	0.091	0.180	0.504	2.82	3.57	0.036	0.093	0.386
2.24	2.08	0.088	0.176	0.499	2.84	3.64	0.035	0.091	0.383
2.26	2.12	0.085	0.172	0.495	2.86	3.71	0.034	0.089	0.379
2.28	2.15	0.083	0.168	0.490	2.88	3.78	0.033	0.087	0.376
2.30	2.19	0.080	0.165	0.486	2.90	3.85	0.032	0.085	0.373
2.32	2.23	0.078	0.161	0.482	2.92	3.92	0.031	0.083	0.370
2.34	2.27	0.075	0.157	0.477	2.94	4.00	0.030	0.081	0.366
2.36	2.32	0.073	0.154	0.473	2.96	4.08	0.029	0.080	0.363
2.38	2.36	0.071	0.150	0.469	2.98	4.15	0.028	0.078	0.360
2.40	2.40	0.068	0.147	0.465	3.00	4.23	0.027	0.076	0.357
2.42	2.45	0.066	0.144	0.461	3.10	4.66	0.023	0.0685	0.342
2.44	2.49	0.064	0.141	0.456	3.20	5.12	0.020	0.062	0.328
2.46	2.54	0.062	0.138	0.452	3.3	5.63	0.0175	0.0555	0.315
2.48	2.59	0.060	0.135	0.448	3.4	6.18	0.015	0.050	0.302
2.50	2.64	0.059	0.132	0.444	3.5	6.79	0.013	0.045	0.290
2.52	2.69	0.057	0.129	0.441	3.6	7.45	0.0114	0.041	0.278
2.54	2.74	0.055	0.126	0.437	3.7	8.17	0.0099	0.037	0.2675
2.56	2.79	0.053	0.123	0.433	3.8	8.95	0.0086	0.0335	0.257
2.58	2.84	0.052	0.121	0.429	3.9	9.80	0.0075	0.030	0.247
2.60	2.90	0.050	0.118	0.425	4.0	10.72	0.0066	0.028	0.238
2.62	2.95	0.049	0.115	0.421					
2.64	3.01	0.047	0.113	0.418					

† Para un gas perfecto con calor específico constante,  $k = 1.4$