MECANICA DE LOS FLUIDOS TEMA 3

Cinemática de los fluidos. La cinemática de los fluidos trata del movimiento de los mismos sin considerar las causas que lo forman. Se especializa en las trayectorias, velocidades y aceleraciones.

Métodos de Lagrange y Euler:

En la mecánica de los fluidos se puede estudiar el problema de dos formas: Método de Lagrange y Método de Euler.

Método de Lagrange: en este método se estudian las variables de una partícula de fluido siguiendo a la misma a lo largo de su trayectoria: es decir que se considera el vector posición y el vector velocidad a lo largo del tiempo. Se sigue a la partícula en movimiento. Esta técnica es compleja y se usa en ciertos estudios de la mecánica de los fluidos como el seguimiento del rastro de los escalares pasivos en un flujo (aplicado por ejemplo a la migración de residuos en un río o al seguimiento de una marea negra); estudio de la dinámica de los gases enrarecidos durante el reingreso a la atmósfera de una nave espacial), el estudio de los gases de combustión en un motor, turbina o caldera, estudio de la evolución de vapor en una cañería, estudio de la evolución de líquidos en una turbina hidráulica o una bomba centrífuga. En otros campos sería el de la seguridad por ejemplo el monitoreo de la posición y velocidad a lo largo del tiempo de una flota de camiones.

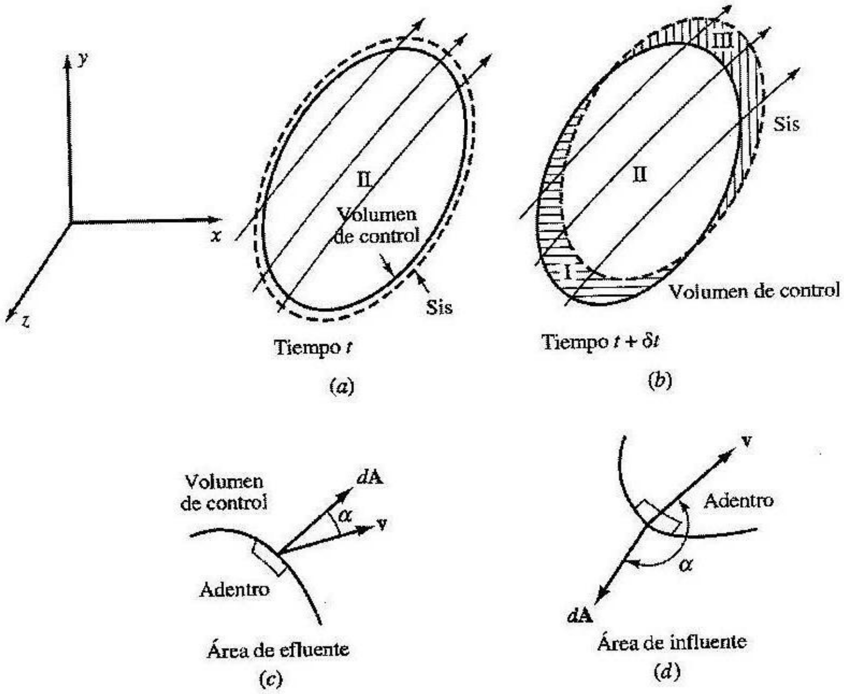
Método de Euler: en este caso se considera un espacio denominado volumen de control fijo en el espacio. El fluido ingresa a ese volumen de control y sale del mismo. En este caso no se miden las propiedades de las partículas por separado sino que se definen variables de campo, que son funciones del espacio y del tiempo dentro del volumen de control. Este método se usa para estudiar el comportamiento del fluido dentro de un espacio definido por límites físicos tales como el flujo y las pérdidas dentro de una válvula, comportamiento del fluido en la salida en un orificio, cañerías, etc.

Sistema fluido

Se refiere a una masa específica de fluido que se encuentra dentro de contornos definidos por una superficie cerrada. En este caso la forma de un sistema puede cambiar con el tiempo por efectos diversos. Este concepto se usa para el estudio lagrangiano de los fluido en especial la evolución de los fluidos compresibles, no compresibles en transitorios y los fluidos mixtos.

Volumen de control

El volumen de control es un espacio definido que no se mueve ni cambia de forma. Está limitado por una superficie fija llamada superficie de control. La forma y el tamaño son arbitrarios. El fluido entra y sale de este volumen de control a través de dos o más porciones de la superficie. Este concepto se usa para el método de Euler para el estudio del movimiento de los fluidos por ejemplo alrededor de una válvula, en una boquilla de descarga, una sección de cañerías, una superficie en contacto con un fluido, etc.



Relación entre sistema y volumen de control: esta relación se conoce como teorema de Euler y es una ecuación básica para estudiar los sistemas que varían en el tiempo.

Sea X una propiedad cualquiera del fluido por ejemplo masa, cantidad de movimiento, energía. En el instante t esa propiedad en la volumen ocupado por la superficie de control es $X_{s(t)}$ y se representa como $X_{VC(t)}$. En el instante $t+\Delta t$ el valor de la propiedad será $X_{s(t+\Delta t)}$, y estará constituida por la propiedad que está dentro del volumen de control, más la cantidad de propiedad que haya entrado por la superficie de control menos la cantidad de propiedad que haya salido. En símbolos:

$$X_{(t)} = X_{VC\,(t)}$$

$$X_{s\,(t+\Delta t)} = X_{VC\,(t+\Delta t)} + \Delta X_{VC}^{\,ingresante} - \Delta X_{VC}^{\,saliente}$$

$$X_{s\,(t+\Delta t)} - X_{(t)} = X_{VC\,(t+\Delta t)} - X_{VC\,(t)} + \Delta X_{VC}^{\,ingresante} - \Delta X_{VC}^{\,saliente}$$

Dividiendo por Δt y tomando límite para Δt tendiendo a 0.

$$\delta X_s/\delta t = \delta X_{VC}/\delta t + \delta X_{VC}^{\,ingresante}/\delta t - \delta X_{VC}^{\,saliente}/\delta t$$

Esta ecuación permite estudiar las variaciones que se producen dentro de una superficie de control.

Tipos y definición de flujos

Flujo ideal y real: el primero es el flujo que se verifica en un fluido ideal, donde la viscosidad es nula (no hay efectos viscosos y de frontera). El flujo real por el contrario considera los efectos de la viscosidad.

Flujo compresible e incompresible: el fluido incompresible considera que la densidad es constante y se verifica en los líquidos. El flujo compresible tiene en cuenta la compresibilidad y se aplica principalmente a los gases.

Flujo estacionario y no estacionario: en el flujo estacionario las propiedades del fluido en cada punto no varían con el tiempo. Pueden variar con la posición. Por ejemplo $dP/dt = 0$ $dv/dt = 0$ pero puede ser que $dP/dx \neq 0$ o $dv/dx \neq 0$. También se llama movimiento o flujo permanente.
En el flujo no estacionario las propiedades varian con el tiempo ($dP/dt \neq 0$ o $dv/dt \neq 0$): Otro nombre es flujo impermanente.

Flujo mixto: es aquel en donde se mueven en paralelo líquidos y gases, líquidos o gases con sólidos en suspensión, líquidos con distinta densidad que forman fases inmiscibles o bien gases con distinta densidad, por ejemplo aire y CO_2 o aire y gases volcánicos.

Flujo a presión y flujo por gravedad: el primero implica que el fluido se mueve por efecto de la presión solamente. En el segundo interviene la acción de la gravedad. Los gases se mueven principalmente por efecto de la diferencia de presiones y los líquidos se pueden mover por ambos efectos. En los flujos mixtos de gases en la naturaleza (aire y gases volcánicos) el efecto de la gravedad es el que mueve los mismos como si fueran líquidos por un canal.

Flujo espacialmente constante y espacialmente variable: el primero es cuando la densidad del fluido y la velocidad media local del flujo son idénticas en todos los puntos del campo fluido. Espacialmente variable es cuando no se verifica que la densidad y la velocidad media local no son idénticas (se considera a la velocidad como magnitud vectorial)

Flujo laminar: en este caso el fluido se mueve desplazándose una capa respecto de la otra en forma longitudinal y paralela sin que exista movimiento de fluido en una dirección diferente (por ejemplo transversal). Este movimiento se puede visualizar mediante una baraja de naipes en donde cada componente se desplaza paralelo al otro.

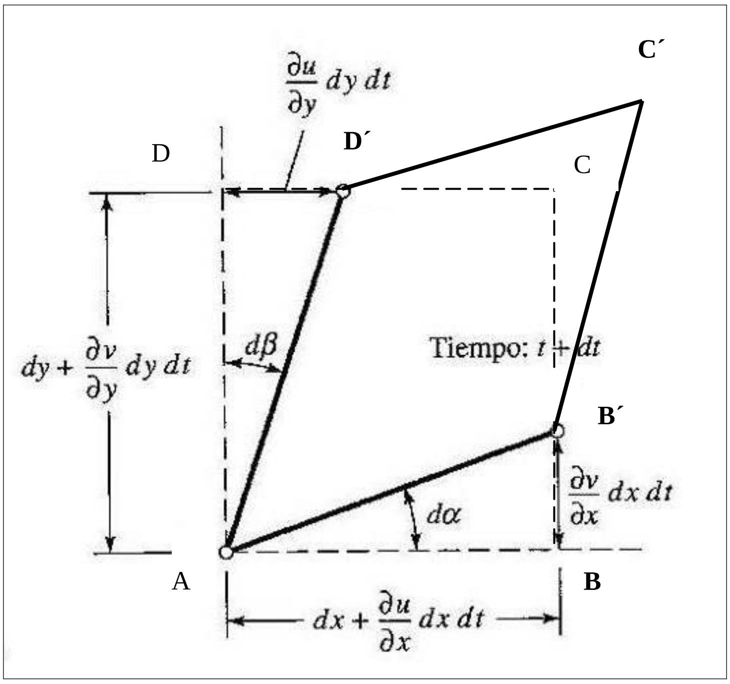
Flujo turbulento: en este caso existe un componente de la velocidad que tiene una dirección diferente a la del flujo general y se produce mezcla de fluido en sentido transversal al flujo.
Experiencia de Reynolds: en esta experiencia se introdujo un filamento de colorante líquido en una corriente de fluido y se varió la velocidad de la misma. A bajas velocidades se observa que el filamento de colorante se mantiene paralelo a la dirección general del fluido. Si se aumenta la velocidad se observa que el filamento se curva y forma remolinos, mezclándose con el fluido y a partir de cierta distancia el fluido adquiere una coloración uniforme. En el primer caso se observa un flujo laminar y en el segundo caso se observa un flujo turbulento. Mientras mayor sea la viscosidad del fluido, el flujo laminar se mantendrá a mayor velocidad. Se define un parámetro denominado número de Reynolds como $Re= D.v.\rho/\mu$ en donde μ es la viscosidad, ρ es la densidad, v la velocidad del fluido y D una longitud característica que en este caso es el diámetro de la cañería. En función de este parámetro se dice que existe flujo laminar cuando $Re < 2000$, flujo turbulento cuando $Re > 4000$ y flujo de transición cuando $2000 < Re < 4000$. En ciertos experimentos los autores han fijado límites mayores de Re para el flujo laminar y para el flujo turbulento, pero estas condiciones son especiales y se dan en casos particulares de la física de los fluídos y en condiciones que no son estables, cualquier perturbación externa produce un cambio en las condiciones de flujo. Los límites indicados acá son los que corresponden a la ingeniería.

Flujo uniforme o variable: esta clasificación se usa en canales abiertos: flujo uniforme es aquel que la forma y dimensiones de la sección transversal se mantiene constante.

Flujo supersónico y subsónico: el flujo subsónico es aquel en que la velocidad del fluido o de una partícula en un fluido estacionario es inferior a la velocidad de precesión C conocida también como velocidad del sonido. Esta es la velocidad a la que se traslada una onda de presión en un fluido compresible y depende de las características y propiedades del mismo. Es supersónico cuando supera esta velocidad.

Flujo rotacional o irrotacional: el flujo irrotacional se puede describir brevemente como aquel en que cada elemento no sufre una rotación neta entre dos instantes en condiciones determinadas. Requiere un tratamiento matemático que será detallado más adelante.

Consideremos un sistema de control de forma cúbica y analicemos una cara que se deforma



$d\alpha = BB'/ dx$ =

$BB' = ((\partial v/\partial x)dx)\ dt$ reemplazando

$d\alpha = ((\partial v/\partial x)dx)\ dt/ dx = (\partial v/\partial x)\ dt$

La velocidad angular es $\omega_\alpha = \Delta\alpha/\Delta t = \partial v/\partial x$

Por otro lado

$d\beta = DD'/ dy$

$DD' = ((-\ \partial u/\partial y)dy)\ dt$ (signo negativo porque u se dirige en sentido contrario a la rotación) reemplazando

$\Delta\beta = ((-\ \partial u/\partial y)dy)\ dt/ dy = -\ (\partial u/\partial y)\ dt$

La velocidad angular es $\omega_\beta = d\beta/dt = -\ \partial u/\partial y$

La velocidad angular promedio es

$\omega_z = (1/2)\ (\partial v/\partial x - \partial u/\partial y)$

De la misma forma podemos trabajar para las otras dimensiones:

$\omega_y = (1/2)\ (\partial u/\partial z - \partial w/\partial x)$

$\omega_x = (1/2)\ (\partial w/\partial y - \partial v/\partial z)$

El flujo se dice irrotacional si las velocidades angulares son nulas, es decir

$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ o lo que es lo mismo:

$\partial w/\partial y - \partial v/\partial z = \partial u/\partial z - \partial w/\partial x = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y = 0$

Lo que se verificará cuando

$\partial w/\partial y = \partial v/\partial z;\ \ \partial u/\partial z = \partial w/\partial x;\ \ \partial v/\partial x = \partial u/\partial y$

Vectorialmente:

$$\omega = \tfrac{1}{2}\ (\text{rot } \cancel{\mathbf{V}}\ ) = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

Para que el movimiento sea irrotacional se debe verificar que el determinante sea cero. Vectorialmente: rot $\cancel{\mathbf{V}} = 0$.

Desde el punto de vista físico la partícula puede rotar y deformarse. Si solamente rota o se deforma de tal manera que la velocidad angular de deformación sea nula el flujo es irrotacional. Acá hay que tener cuidado porque algunos autores colocan como ejemplo de movimiento rotacional al juego conocido como vuelta al mundo en donde las sillas giran alrededor de un eje manteniendo el asiento horizontal. Si se analizan las deformaciones son nulas y por lo tanto el movimiento es irrotacional.

Trayectoria

Se define como trayectoria a los sucesivos puntos que ocupan en el espacio una partícula de fluido durante el tiempo. Indica la posición de la partícula a lo largo del tiempo.

Líneas de corriente

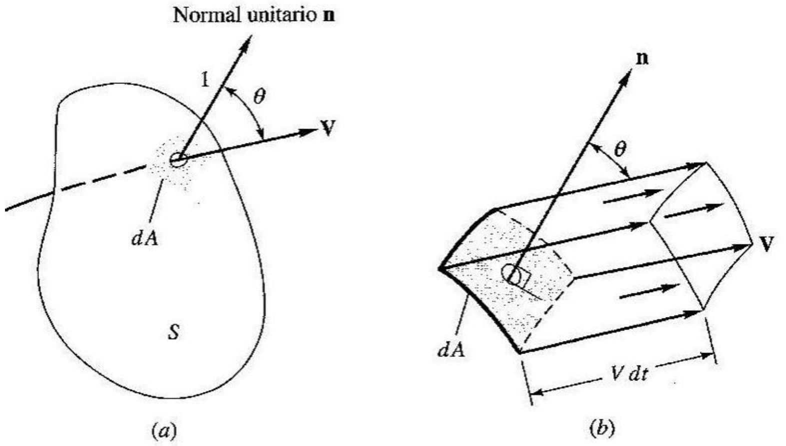
La línea de corriente es la tangente a los vectores velocidad de un grupo de partículas de fluido. No coincide con la trayectoria excepto en los flujos estacionarios.
Dado que la línea de corriente es tangente al vector velocidad, ninguno de ellos la atraviesa por lo que la misma se dice que es impermeable

Tubo de corriente

Es un conjunto de líneas de corriente.

Caudal o cantidad de flujo

Es la medida de la masa (caudal másico) o volumen (caudal volumétrico) que atraviesa un área definida por unidad de tiempo.
Normalmente esta coincide con la sección transversal de un tubo de corriente.



Físicamente se define el caudal másico como masa por unidad de tiempo y el caudal volumétrico como el volumen por unidad de tiempo, en ambos casos medidos al atravesar una superficie normal a la dirección del desplazamiento. El concepto se aplica a fluidos y sólidos.

Matemáticamente:

Caudal másico $dG = dm/dt = \rho\cancel{\mathbf{dA}}.\cancel{\mathbf{dx}}/dt$

Pero $\cancel{\mathbf{dx}}/dt = \cancel{\mathbf{V}}$ (velocidad)

$dG = \rho\cancel{\mathbf{dA}}.\cancel{\mathbf{V}} = \rho\ dA \cos\theta\ V$

$G = \rho \int \cancel{\mathbf{dA}}.\ \cancel{\mathbf{V}} = \rho\ A \cos\theta\ V$ donde A es el área media normal al vector desplazamiento

Dimensiones: $[G] = [M]/[T]$

Unidades : kg/s; ton/hr, slug/s; g/s

Caudal volumétrico

$dQ = dv/dt = \cancel{\mathbf{dA}}.\cancel{\mathbf{dx}}/dt$

Pero $\cancel{\mathbf{dx}}/dt = \cancel{\mathbf{V}}$ (velocidad)

$dQ = \cancel{\mathbf{dA}}.\cancel{\mathbf{V}} = dA \cos\theta\ V$

$Q = \int \cancel{\mathbf{dA}}.\ \cancel{\mathbf{V}} = A \cos\theta\ V$ donde A es el área media normal al vector desplazamiento

Las dimensiones son $[Q] = [L]^3/[T]$

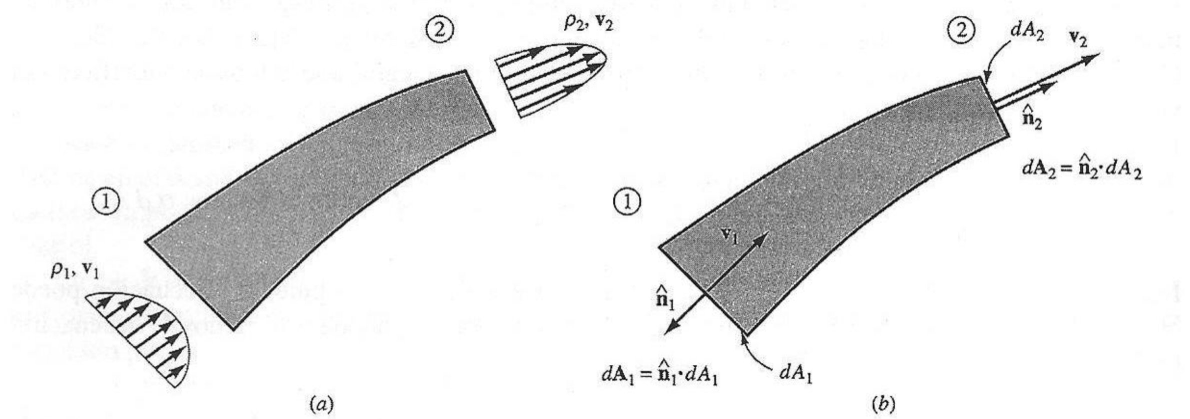
Unidades: m^3/s, cm^3/s, pie^3/s

Relación entre caudal másico y volumétrico

De las ecuaciones de los mismos podemos definir que $G = \rho Q$

Ecuación de continuidad para fluidos compresibles e incompresibles

La ecuación de continuidad en Mecánica de los Fluidos es la expresión matemática del principio de conservación de la masa. Consideremos un tubo de corriente y dentro de él tracemos una superficie de control con su correspondiente volumen de control



En el instante t la masa que hay en el tubo es m_{vc} y en el instante t +dt ha variado por el ingreso de $dm_{vc}^{ingreso}$ por un extremo y dm_{vc}^{egreso} por el otro extremo aplicando el teorema de Euler podemos escribir

$dm_s/dt = dm_{vc}/dt + dm_{vc}^{ingreso}/dt - dm_{vc}^{egreso}/dt$

De acuerdo a la física newtoniana (sin considerar los efectos de la relatividad en los la masa se transforma en energía) la masa se mantiene constante, por lo que

$dm_s/dt = 0$

Por otro lado como no hay reacción química dentro del volumen de control y las paredes laterales del tubo son impermeables (no hay salida ni ingreso de materia por esa superficie lateral

$dm_{vc}/dt = 0$

luego

$dm_{vc}^{ingreso}/dt - dm_{vc}^{egreso}/dt = 0$

$dm_{vc}^{ingreso}/dt = \rho_1 A_1 dx_1/dt = \rho_1 A_1 V_1$

$dm_{vc}^{egreso}/dt = \rho_2 A_2 dx_2/dt = \rho_2 A_2 V_2$

reemplazando

$\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$

Definimos el caudal másico como $G = dm/dt = \rho_1 A_1 dx/dt = \rho_1 A_1 V_1$
Para fluidos incompresibles $\rho_1 = \rho_2$

$A_1 V_1 = A_2 V_2$

Y definimos el caudal volumétrico como

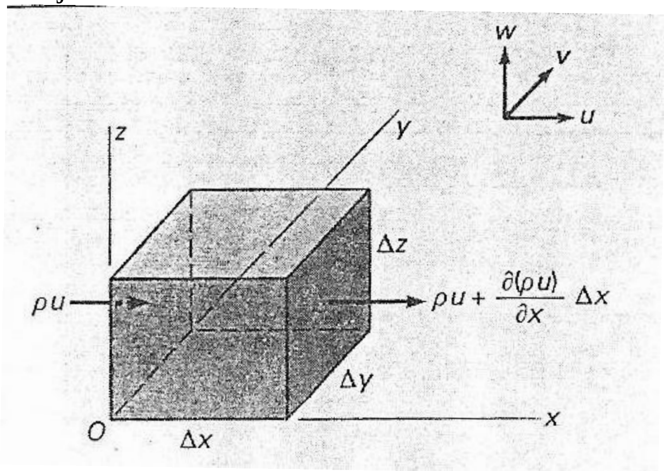
$Q = dV/dt = A_1 dx/dt = A_1 V_1$

Luego para fluidos compresibles podemos escribir $G_1 = G_2$

Mientras que para incompresibles $Q_1 = Q_2$

Esta forma de la ecuación de la continuidad se utiliza para flujo en cañerías o dentro de contornos sólidos. Esta ecuación es válida para fluidos ideales y para fluidos reales en los cuales se considera la velocidad media para V y no la instantánea que varía a lo normalmente a la dirección del tubo de corriente.
Para el caso de flujo en contornos abiertos la misma se debe expresar en forma diferencial en tres direcciones como se demuestra a continuación.

Consideremos un cubo elemental de lados Δx, Δy y Δz. Consideremos las caras perpendiculares al eje X y analicemos el flujo en estas caras.



Por la cara de la izquierda ingresa un flujo o caudal másico $\rho u \Delta y \Delta z$ y por la cara derecha va a salir un flujo másico $\{\rho u+[\partial(\rho u)/\partial x]\}\Delta y \Delta z$ (el caudal másico varía en $-[\partial(\rho u)/\partial x]\}\Delta y \Delta z$ para ese eje.

Repitiendo ese razonamiento para cada eje tenemos y aplicando el teorema de Euler:

Eje x: $\rho u \Delta y \Delta z - \{\rho u+[\partial(\rho u)/\partial x]\}\Delta y \Delta z = \partial\rho/\partial t \, \Delta y \Delta z$
Eje y: $\rho v \Delta x \Delta z - \{\rho v+[\partial(\rho v)/\partial y]\}\Delta x \Delta z = \partial\rho/\partial t \, \Delta x \Delta z$
Eje z: $\rho w \Delta x \Delta y - \{\rho w+[\partial(\rho w)/\partial z]\}\Delta x \Delta y = \partial\rho/\partial t \, \Delta x \Delta y$

Donde u, v, w son los componentes del vector velocidad $\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$

Si dividimos la primera ecuación por $\Delta y \Delta z$, la segunda por $\Delta x \Delta z$, y la tercera por $\Delta x \Delta y$ y sumando miembro a miembro

$\rho u - \{\rho u+[\partial(\rho u)/\partial x]\} + \rho v - \{\rho v+[\partial(\rho v)/\partial y]\} + \rho w - \{\rho w+[\partial(\rho w)/\partial z]\} = \partial\rho/\partial t$

distribuyendo

$- [\partial(\rho u)/\partial x] - [\partial(\rho v)/\partial y] - [\partial(\rho w)/\partial z] = \partial\rho/\partial t$

Como $\partial\rho/\partial t = 0$ la sumatoria debe ser 0 también. Multiplicando por -1 y distribuyendo:

$u\,\partial\rho/\partial x + v\,\partial\rho/\partial y + w\,\partial\rho/\partial z + \rho\,(\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z) = 0$

Esta es la ecuación de continuidad para flujo compresible estacionario. Vectorialmente

$$\mathrm{div}\,(\rho\vec{\mathbf{V}}) = 0$$

Para flujo incompresible ρ = constante, $\partial\rho/\partial x = \partial\rho/\partial y = \partial\rho/\partial z = 0$

$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0$

Vectorialmente $\mathrm{div}\ \vec{\mathbf{V}} = 0$

Condiciones para el flujo ideal

1- Satisface la ecuación de continuidad
2- Satisface la segunda ley de Newton en cualquier punto en cualquier instante.
3- Ninguna frontera sólida puede ser penetrada por el flujo ni pueden existir vacios entre el fluido y la frontera.

Velocidad y Aceleración

En un campo tridimensional las velocidades pueden variar tanto en magnitud como en dirección. Cada componente del vector velocidad $\vec{\mathbf{V}}$ se puede escribir como.

$\vec{\mathbf{V}}\,(x,y,z) = u\,(x,y,z) + v\,(x,y,z) + w\,(x,y,z)$

Donde

$u_{est} = u\,(x,y,z)$
$v_{est} = v\,(x,y,z)$
$w_{est} = w\,(x,y,z)$

la aceleración se define como

$\mathbf{a}_{est} = d\,[\vec{\mathbf{V}}\,(x,y,z)]/dt = (\partial\vec{\mathbf{V}}/\partial x)\,(dx/dt) + (\partial\vec{\mathbf{V}}/\partial y)\,(dy/dt) + (\partial\vec{\mathbf{V}}/\partial z)\,(dz/dt)$

Como $dx/dt = u$; $dy/dt = v$; $dz/dt = z$ la ecuación se puede escribir:

$\mathbf{a}_{est} = \mathbf{u}\,\partial\vec{\mathbf{V}}/\partial x + \mathbf{v}\,\partial\vec{\mathbf{V}}/\partial y + \mathbf{w}\,\partial\vec{\mathbf{V}}/\partial z$

Donde cada componente es

$(a_x)_{est} = u\,(\partial u/\partial x) + v\,(\partial v/\partial y) + w\,(\partial w/\partial z)$

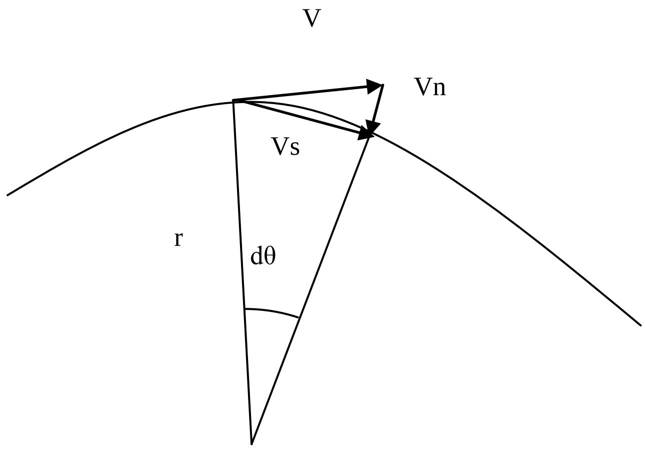
$(a_y)_{est} = u\,(\partial u/\partial x) + v\,(\partial v/\partial y) + w\,(\partial w/\partial z)$

$(a_z)_{est} = u\,(\partial u/\partial x) + v\,(\partial v/\partial y) + w\,(\partial w/\partial z)$

La aceleración podemos dividirla en dos tipos: convectiva (por efecto de la traslación) y local por efecto de la rotacionalidad)

La aceleración convectiva tiene dos componentes: tangencial (aumenta la velocidad a lo largo de la línea de corriente) y normal (cambia la dirección de la línea de corriente).

Si se considera una curva o una línea de corriente conviene colocar el eje x en coincidencia con el vector velocidad que es tangente a la línea de corriente



$a_t = dV_s/dt = (dV_s/dt) . (ds/ds) = (dV_s/ds) . (ds/dt) = V_s . dV_s/ds = ½ \, d\,(V_s^2)/ds$

$a_n = dV_n/dt = dV_n/dt \; ds/ds = dV_n/ds \; ds/dt = V_s \; dV_n/ds$

$d\theta = ds/r = \Delta V_n/V_s = dVn/ds = Vs/r$

$a_n = V_s.V_s/r = (V_s)^{2}/r$

La aceleración total será la suma de la aceleración convectiva y local con dos componentes: tangencial (T) y normal (N).

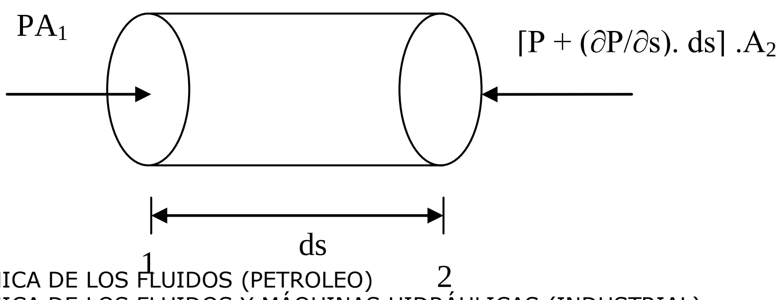
$a_T = ½ \, d\,(V_s^2)/ds + dV_s/dt$

$a_N = (V_s)^{2}/r + dV_n/dt$

donde dV_s/dt y dV_n/dt son los componentes tangencial y normal de la aceleración local.

Relación entre la aceleración y el gradiente de presión

Consideremos una cañería en donde circula un fluido ideal en movimiento irrotacional, por lo que no hay efectos de la aceleración local. Las áreas A_1 y A_2 son iguales



Sabemos que una fuerza derivada de la presión es F= PA, del gráfico anterior

$F_s = PA - [P + (\partial P/\partial s).\ ds]\ .A$ como $A_1 = A_2 = A$

$F_s/(A.ds) = -(\partial P/\partial s) = f_s$ (fuerza por unidad de volumen)

Por la segunda ley de Newton:

$-(\partial P/\partial s) = \rho.\ a_s$

$-(\partial P/\partial s) = \rho.\ a_n$

Reemplazando los valores de a_s y a_n

$-(\partial P/\partial s) = \rho\ [½\ d\ (V_s^2)/ds]$

$-(\partial P/\partial s) = \rho.\ [(V_s)^2/r] = \rho\ V_s\ dV_n/ds$

Despejando e integrando

$$\int_1^2 -dP = \int_1^2 (\rho/2)\ d\ [(V_s^2)/ds] = P_2 - P_1 = \rho/2\ (V_{s2}^2 + V_{s1}^2)$$

$-(\partial P/\partial s) = \rho.\ [(V_s)^2/r] + \rho\ [½\ d\ (V_s^2)/ds] - \rho\ [½\ d\ (V_s^2)/ds]$

Reordenando

$-(\partial P/\partial s) = \rho.\ V_s\ [dV_n/ds - dV_s/ds] + \rho\ [½\ d\ (V_s^2)/ds]$

$dV_n/ds - dV_s/ds = 0$ por irrotacionalidad

$-(\partial P/\partial s) = \rho\ [½\ d\ (V_s^2)/ds]$

$$\int_1^2 -dP = \int_1^2 (\rho/2)\ d\ [(V_s^2)/ds] = P_2 - P_1 = \rho/2\ (V_{s2}^2 + V_{s1}^2)$$

$P_1 + (\rho/2)\ V_{s1}^2 = P_2 + (\rho/2)\ V_{s2}^2$ Energía de la línea de corriente

Cuando el movimiento es irrotacional la energía de la partícula es constante para cualquier línea de corriente (este concepto se aplica sobre una línea de corriente).

Función Potencial y función de corriente

La velocidad angular resultante de un movimiento rotacional era:

$$\omega = \tfrac{1}{2}\,(\text{rot}\ \vec{V}) = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ u & v & w \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}\,(\vec{V}\ \mathbf{x}\ \vec{V})$$

$\omega = \tfrac{1}{2}[(\partial w/\partial y - \partial v/\partial z)i + (\partial u/\partial z - \partial w/\partial x)j + (\partial v/\partial x - \partial u/\partial y)k]$

Si definimos una función φ tal que

$\varphi = \varphi\,(x,y,z)$

en donde se cumple que

$u = \partial\varphi/\partial x$
$v = \partial\varphi/\partial y$
$w = \partial\varphi/\partial z$

Si esta función existe y cumple con la condición de que $\omega = 0$ (flujo irrotacional) se denomina función potencial.

Consideremos el plano yz

$d\varphi = v dy + w dz = (\partial\varphi/\partial y)\, dy + (\partial\varphi/\partial z)\, dz$

$\vec{V} = v\mathbf{j} + w\mathbf{k} = (\partial\varphi/\partial y)\mathbf{j} + (\partial\varphi/\partial z)\mathbf{k} = \nabla\,.\,\varphi$ (gradiente de φ)

Vemos que la velocidad es el gradiente de la función Potencial

Por la condición de irrotacionalidad

$\text{Rot } V = V \times (\nabla.\,\varphi) = 0$

Reemplazando

$d\varphi = (\partial\varphi/\partial y)\, dy + (\partial\varphi/\partial z)\, dz = 0$ entonces φ es contante y por lo tanto es una superficie equipotencial de valor φ.

$\text{div}\,(\varphi) = \vec{V} \times \vec{V} = \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = \partial^2\varphi/\partial y^2 + \partial^2\varphi/\partial z^2 = \nabla^2\varphi = 0$

$\nabla^2\varphi$ se denomina Laplaciano

Concluyendo si el laplaciano de una función φ es igual a cero, dicha función es potencial y si su rotor es cero, la misma es irrotacional.

Definimos la función de corriente como aquella $\psi = \psi\,(y,z)$ tal que en el plano yz cumple con

$v = \partial\psi/\partial z$

$w = - \partial\psi/\partial y$

$d\psi = (\partial\psi/\partial y).\ dy + (\partial\psi/\partial z).\ dz = - wdy + vdz = vdz - wdy$

Si $d\psi = 0$ entonces ψ = constante

div (ψ) = $\cancel{\mathbf{V}}$ x $\cancel{\mathbf{V}}$ = $\partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0$ la divergencia de la velocidad es igual al laplaciano de la la función de potencial y de corriente

div (ψ) = $\cancel{\mathbf{V}}$ x $\cancel{\mathbf{V}}$ = $(\partial^2 \psi/\partial y\partial z) - (\partial^2\psi/\partial z\partial y) = 0$

Consideremos lo siguiente

$v = dy/dt$; $w = dz/dt$

$dt = dy/v = dz/w$

considerando las dos últimas igualdades

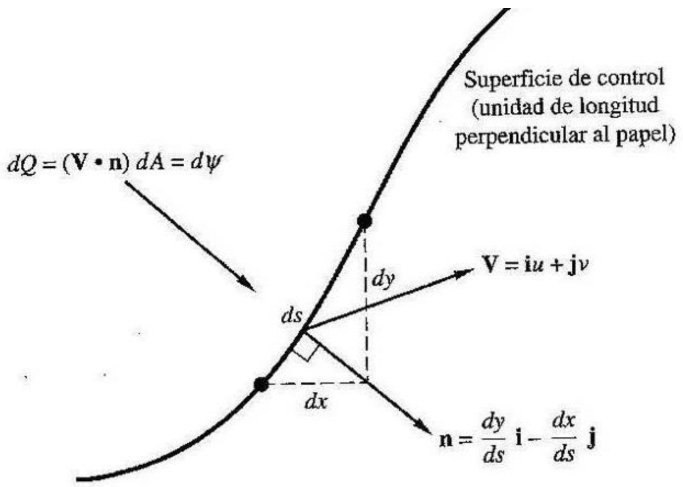
$vdz – wdy = 0$ que es la función de corriente

Supongamos dos líneas de corriente

dn es un diferencial exacto y V es la velocidad del flujo

$V\ dn = vdz – wdy = (\partial\psi/\partial z)\ dz + (\partial\psi/dy)\ dy = d\ \psi\varphi$

El incremento entre dos líneas de corriente es igual al caudal volumétrico que circula entre ellas dos.



La interpretación geométrica de una función de corriente: es el flujo volumétrico a través de un elemento infinetesimal de superficie de control.

Red de corriente

Es el conjunto de líneas de corriente y líneas de potencial. Se caracteriza porque las líneas de corriente son perpendiculares a las líneas de potencial.

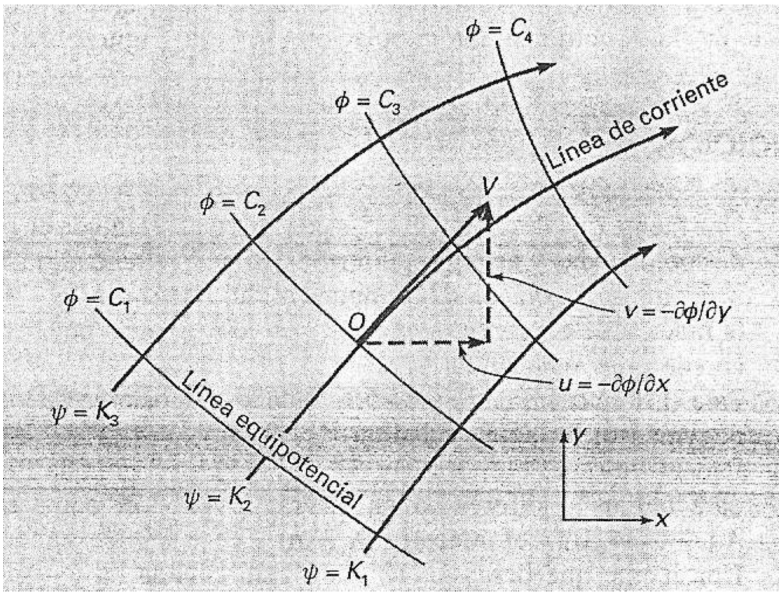
De la ecuación de función de corriente

$d\psi = v dz - w dy = 0$ de donde $dz/dy = w/v$

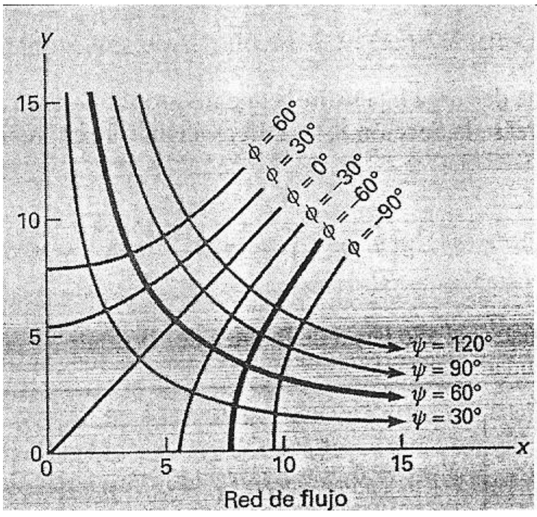
de la función de potencial

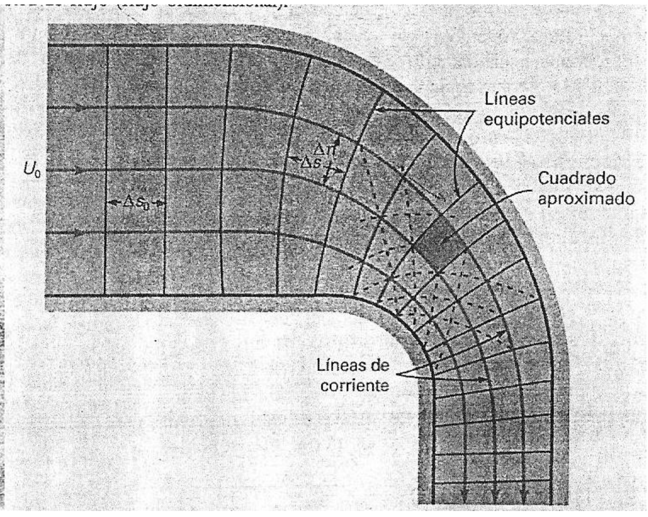
$d\varphi = v dy + w dz = 0$ de donde $dz/dy = - v/w$

Con lo que vemos que las pendientes de las líneas de corriente son inversas y opuestas a las de las líneas de potencial, por lo que estas líneas son perpendiculares entre sí.

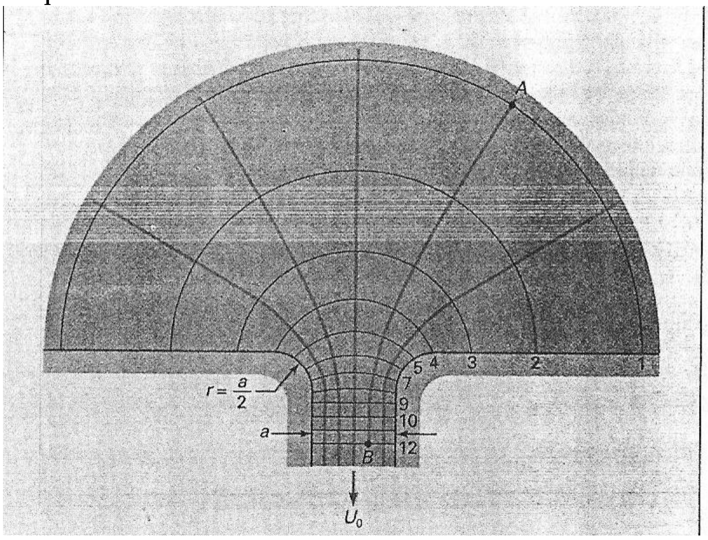


Ejemplos de red de corriente





Esquina Codo reductor



Ingreso a una boquilla vertical

Uso y limitaciones de la red de corriente

La red de corriente se caracteriza por representar las líneas de corriente y las líneas de potencial (que son perpendiculares). En un flujo estacionario representan además las trayectorias.

Las líneas de corriente se deben adaptar al contorno del objeto sólido que restringe el movimiento del fluido, además si este cambia de dirección, lo mismo hará la línea de corriente. Las líneas equipotenciales son perpendiculares a la línea de corriente y en el caso del contorno rígido dado que la línea de corriente es paralela a esta superficie, la línea de potencial es normal a la superficie.

Consideremos un flujo plano en donde la separación entre líneas de corriente i e i+1 es Δn_i. Consideremos además un espesor unitario. El caudal entre las líneas de corriente es constante. En este caso al aplicar la ecuación de continuidad tenemos:

$V_i \Delta n_i \, 1 = V_{i+1} \, \Delta n_{i+1} \, 1$

Simplificando

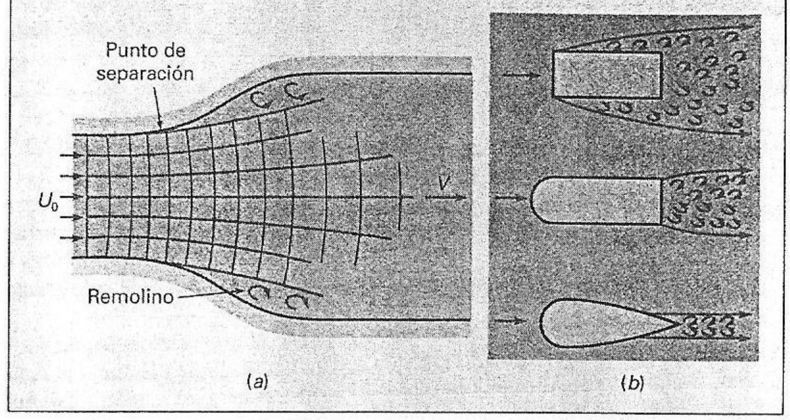
$V_i \Delta n_i = V_{i+1} \, \Delta n_{i+1}$

Luego si analizamos mientras más cerca estén las líneas de corriente entre sí (menor Δn) mayor será la velocidad.

De este razonamiento se deduce que al ingresar a un angostamiento (por ejemplo una reducción) las líneas de deben acercar entre sí, mientras que al aumentar la sección estas se separan y la velocidad del fluido disminuye.

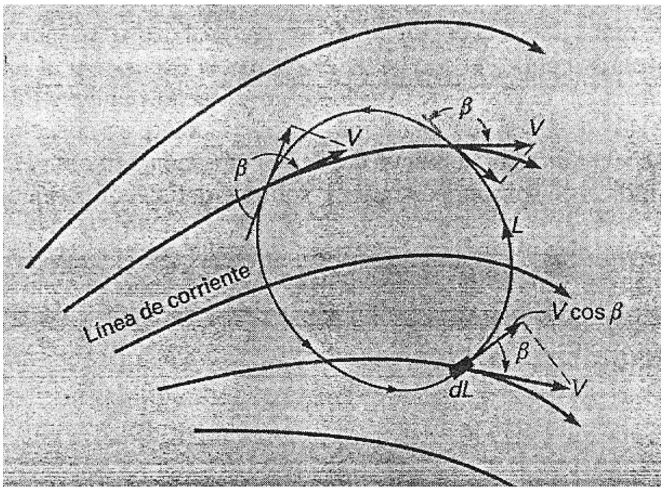
La red de flujo se diseño para el caso de fluidos ideales y se puede usar para los fluidos reales cuando se puede trabajar lejos de los contornos en donde se producen los efectos viscosos más importantes (generación de la capa límite). Cuando se produce una restricción las líneas de corriente siguen aproximadamente el contorno pero no a la inversa y en este último caso se produce un fenómeno llamado desprendimiento de la capa límite, que se estudia más adelante (unidad 5). En la figura siguiente se observa la separación de las líneas de corriente y formación de estelas.

Separación en un flujo divergente. *a*) Formación de remolinos en un canal divergente. *b*) Estelas turbulentas.



Circulación

Supongamos un campo fluido bidimensional, donde L es una curva cualquiera.

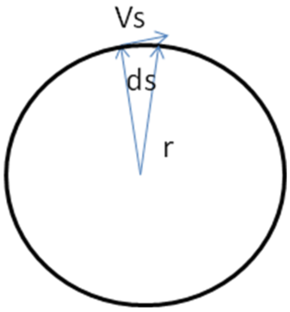


Se define la circulación como

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{V} \,.\, d\mathbf{L} = \oint_L V \cos\beta \;.\; d\mathbf{L}$$

Esta integral es a veces complicada de realizar. Se ven a continuación algunos ejemplos sencillos

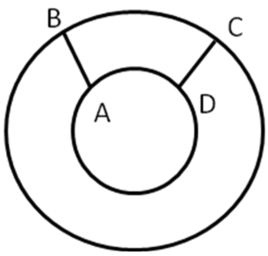
1. Integración en una circunferencia (línea de corriente circular)



$$\Gamma = \int_0^{2\pi} Vs.ds = \int_0^{2\pi} Vs\ r\ d\theta = \int_0^{2\pi} \omega\ r\ dr = 2\pi\ \omega\ r^2.$$

$\Gamma/\pi\ r^2 = 2\ \omega = \nabla \times \mathbf{V}$ Todos los movimientos que tienen rotación son rotacionales.

2. Integración en un sector circular



$$\Gamma = \int_A^B Vs\ ds + \int_B^C Vs\ ds - \int_C^D Vs\ ds - \int_D^A Vs\ ds$$

$$\Gamma = \int_0^{\theta} \omega\ r_1 r_1 d\theta - \int_0^{\theta} \omega\ r_2\ r_2 d\theta = \omega\theta(r_1^2 - r_2^2)$$

3. Consideremos una función potencial como rotacional (circuito circular caso 1)

$V = d\psi/ds = d\psi/rd\theta = kd\theta/rd\theta = k/r$

$Vr= k$ esta función se llama droll y es el momento del vector velocidad

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} Vs\ ds = \int_0^{2\pi} (k/r)\ r\ d\theta = 2\pi\ k$$

La circulación es constante

4. Consideremos el mismo razonamiento con otro circuito (sector circular caso 2)

$$\Gamma = \int_A^B Vs\ ds - \int_C^D Vs\ ds = \int_0^{\theta} (k/r_1)\ r_1 d\theta - \int_0^{\theta} (k/r_2)\ r_2 d\theta = 0 \qquad \text{irrotacional}$$

Conclusión: cuando el movimiento contiene al centro de rotación $\Gamma \neq 0$ el movimiento es rotacional y cuando no contiene el centro de giro $\Gamma = 0$.

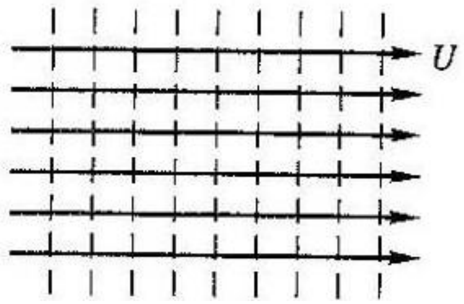
Flujos sencillos

1- Corriente uniforme en la dirección del eje x

Una corriente uniforme en la dirección del eje x uniforme **V** = u**i**. El campo de potencial como las líneas de corriente se determinan como:

$u = \partial\varphi/\partial x = \partial\psi/\partial y$ $\quad\quad$ $v = \partial\varphi/\partial x = -\partial\psi/\partial x = 0$

Corriente uniforme u**i** $\quad$ $\psi = uy$ $\quad\quad$ $\varphi = ux$



2- Fuente o sumidero en el origen

La fuente se define como un punto en donde se genera un flujo radial uniforme saliente. El sumidero es similar pero con un flujo entrante. En este caso conviene usar coordenadas polares pues no hay velocidad circunferencial. A una distancia radial r, considerando un caudal Q constante y una altura o espesor unitario, la velocidad es.

$v_r = Q/(2\pi r1) = m/r = (1/r).\ \partial\psi/\partial\theta = \partial\varphi/\partial r$

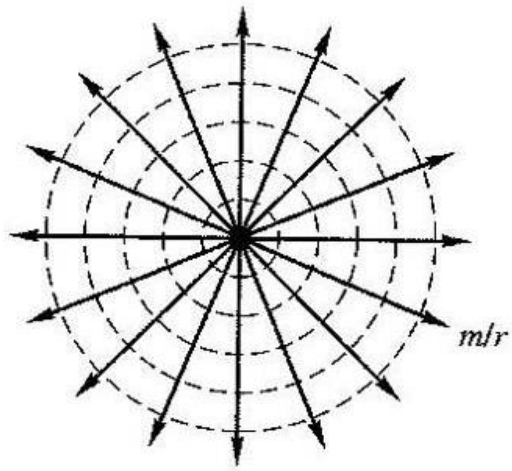
$v_\theta = 0 = -\partial\psi/\partial r = (1/r)\ \partial\varphi/\partial\theta$

las funciones quedan

$\psi = m\theta$ $\quad$ y $\quad$ $\varphi = m \ln r$

donde $m = Q/2\pi$ es constante (consideramos un espesor unitario)

Para el sumidero las líneas de corriente cambian de signo

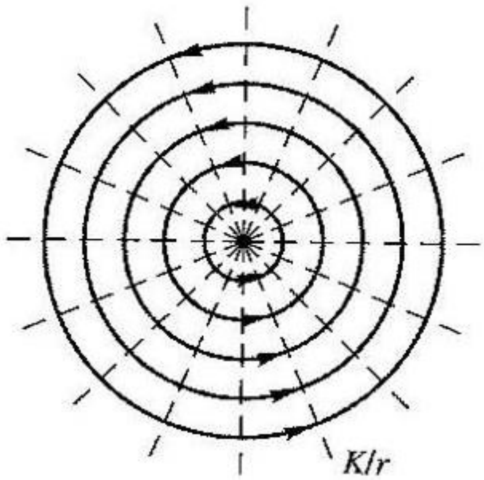


3- Vórtice libre o torbellino irrotacional

Un vórtice libre es un flujo circulatorio puro donde $v_\theta = f(r)$ y $v_r = 0$. Hay muchas distribuciones de velocidad pero tenemos que $v_\theta = k/r$ (verifica la ley de droll), la función de corriente y el potencial de velocidad son:

$v_r = 0 = (1/r). \partial\psi/\partial\theta = \partial\varphi/\partial r$ $v_\theta = k/r = -\partial\psi/\partial r = (1/r)\, \partial\varphi/\partial\theta$

$\psi = - k \ln r$ $\varphi = k\theta$



Otra forma del vórtice libre

Para un vórtice forzado la superficie tenía la forma de un paraboloide de revolución. La parábola que lo representa es $y = \omega^2 r^2/(2g)$

En el caso del vórtice libre consideremos el efecto de la fuerza centrífuga

$df = dm\, \omega^2 r = \rho dA dr\, \omega^2 r$

$dP = df/dA = \rho dr\, \omega^2 r$

$dP/dr = \rho\, \omega^2 r$

Cuando se vió aceleración la energía a lo largo de esta línea de corriente es

$P + \rho v^2/2 =$ constante (mov irrotacional)

Derivando respecto de r

$dP/dr + \rho v dv/dr = 0$

$dP/dr = -\rho v dv/dr$

$\rho\, \omega^2 r = -\rho v dv/dr$

$v/r = dv/dr$

Reordenando

$dr/r + dv/v = 0$ integrando

$\ln r + \ln v = cte$

$vr = e^{cte} = k$ verifica la ley del Droll

Volviendo a la ecuación

$dP = \rho\, v^2/r\, dr = (\gamma/g)\, (k^2/r^3)\, dr$

$dP/\gamma = dy = k^2/(gr^3)\, dr$

$y = k^2/(2gr^2)$

Esta ecuación es una hipérbola

Consideremos la ecuación de la energía

$P + \rho v^2/2 = P(x) – \rho v^2/2 = cte$ para x muy alejado $v = 0$

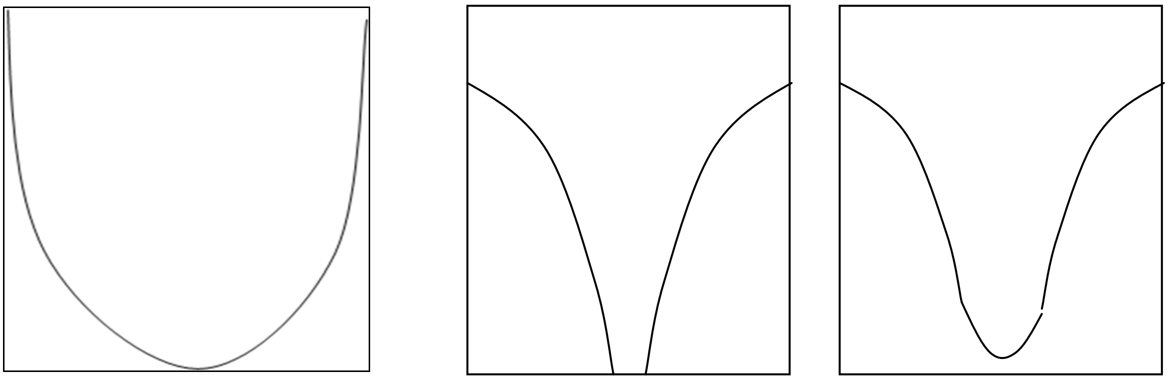
$P = P(\infty) – \rho v^2/2$

Reemplazado v por k/r

$P = P(\infty) – \rho k^2/2r^2$

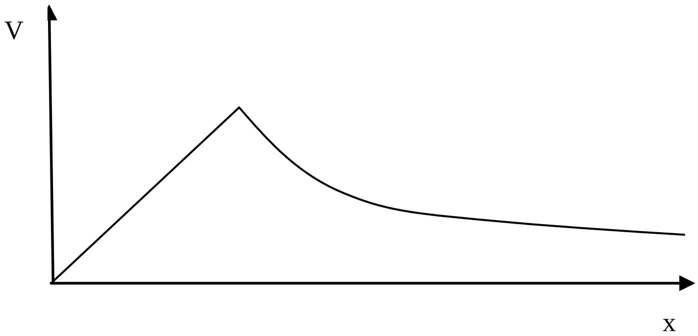
Cuando r tiende a 0, P tiende a $-\infty$

Esta condición no se dá en la realidad. En las proximidades del eje se comporta como un vórtice forzado.



Vórtice forzado Vórtice libre Vórtice real

Distribución de velocidades



El punto en donde se produce el cambio de vórtice libre a forzado está dado por

$y_{forzado} = y_{libre} = k^2/(2gr^2) = \omega^2 r^2/(2g)$

$k^2/(r^2) = \omega^2 r^2$

$k^2/\omega^2 = r^4$ de donde $r = \sqrt{(k/\omega)}$

<u>Superposición fuente más sumidero de igual intensidad</u>

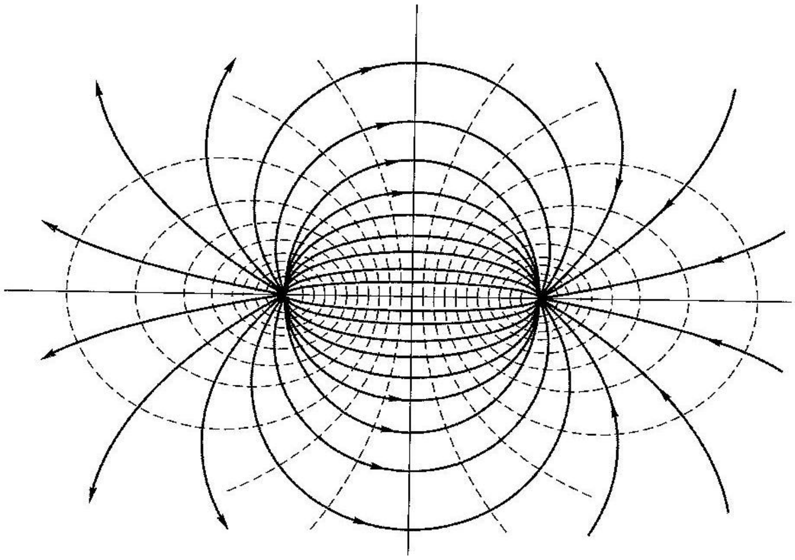
Cada flujo analizado anteriormente es un flujo irrotacional incompresible se verifica que las ecuaciones de Laplace se verifican. Se pueden superponer sus efectos. Matemáticamente es una suma

Consideremos una fuente de intensidad +m situada en un punto de coordenadas (x,y) = (-a,0) y un sumidero de intensidad –m situado en coordenadas (x´, y´) = (0, a) la función de corriente (en coordenadas rectangulares) es:

$\psi = \psi_{fuente} + \psi_{sumidero} = m \text{ tg}^{-1} [y/(x+a)] - m \text{ tg}^{-1} [y/(x-a)]$

La función potencial es:

$\varphi = \varphi_{fuente} + \varphi_{sumidero} = ½ m \ln[(x+a)^2 + y^2] – ½ m \ln [(x+a)^2 + y^2]$



usando identidades trigonométricas y logarítmicas las funciones quedan:

$\psi = - m \, tg^{-1} [2ay/(x^2 + y^2 - a^2)] =$

$\psi = -(m/r) \text{ sen } \theta$

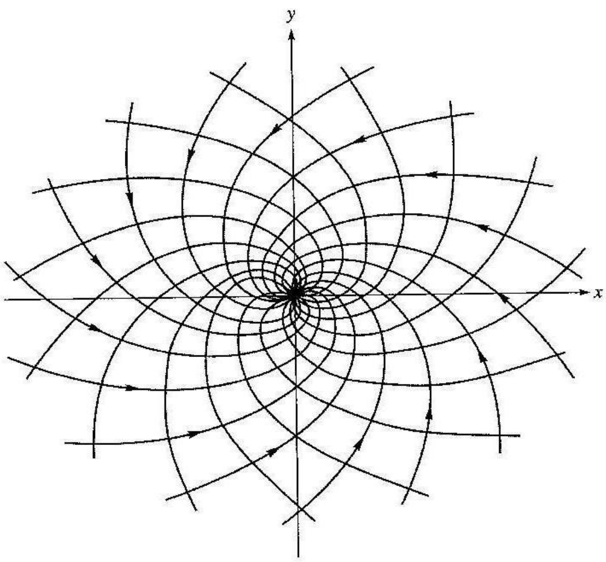
$\varphi = ½ \, m \ln \{[(x+a)^2 + y^2]/[(x-a)^2+y^2]\}$

$\varphi = (m/r) \cos \theta$

<u>Sumidero mas torbellino en el origen</u>

Esta combinación se puede observar en la naturaleza. Se adapta bastante bien al movimiento de un tornado o al desagüe de una bañera.

$\psi = m\theta - k \ln r$ y $\varphi = m \ln r + k\theta$



Las líneas de corriente y equipotenciales forman dos familias ortogonales de espirales logarítmicas. En el centro del torbellino real la ecuación predice una velocidad infinita pero el

flujo circulatorio es rotacional y se puede aproximar como un movimiento como sólido rígido (vórtice forzado)
Una aplicación de esta combinación es el diseño de la voluta de una bomba centrífuga.

Corriente uniforme más fuente en el origen: cuerpo infinito de Rankine

En este caso se suman las corrientes. Las ecuaciones son:

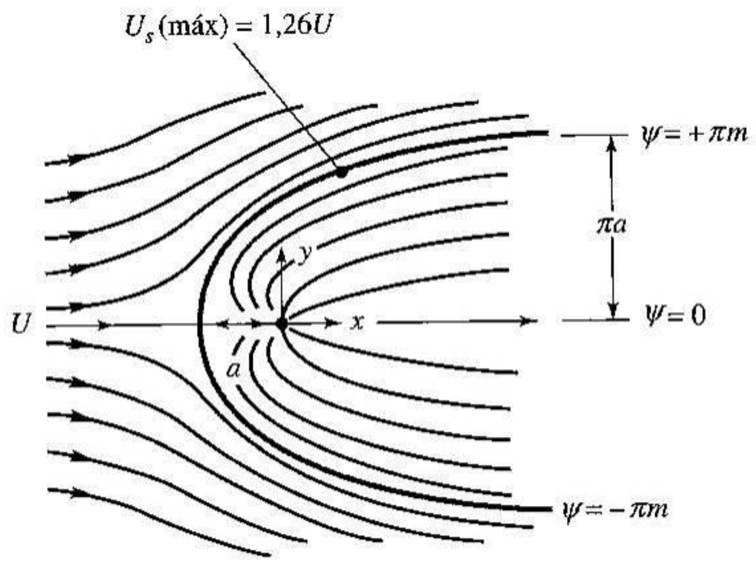
ψ= u r sen θ + mθ y φ = u r senθ + m ln r

el cuerpo formado no es una elipse, la semianchura aguas abajo en un punto muy alejado está dado por πm/U y el radio es:

r = m(π-θ)/u sen θ

Las componentes cartesianas de la velocidad son

u = $\partial\varphi/\partial$y = u + (m/r) cos θ y v = -$\partial\varphi/\partial$x = (m/r) sen θ



Dipolo y corriente uniforme

Consideremos el flujo uniforme en coordenadas polares para el dipolo y para el doblete

φ = ux = u r cos θ φ = (k/r) cos θ

ψ = uy = u r sen θ ψ = (-k/r) sen θ

φ = ux + (k/r) cos θ = ur cos θ + (k/r) cos θ = cos θ(ur+ k/r)

ψ = uy + (-k/r) sen θ = ur sen θ – (k/r) sen θ = sen θ (ur –k/r)

Para que ψ = 0 necesita ser cero la función sen θ o el paréntesis

De la primera opción

sen θ = 0 cuando θ = 0 o 180 °

El paréntesis es cero cuando ur = k/r o bien r^2 =k/u de donde r =√(k/u) = a

La función de corriente cuyo valor es cero está representada por un circulo de radio a con centro en el eje x

La velocidad v está dada por

$v = \partial\psi/\partial r = u\operatorname{sen}\theta + (k/r^2)\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta\,(u + k/r^2)$

por el droll $k = ua^2$

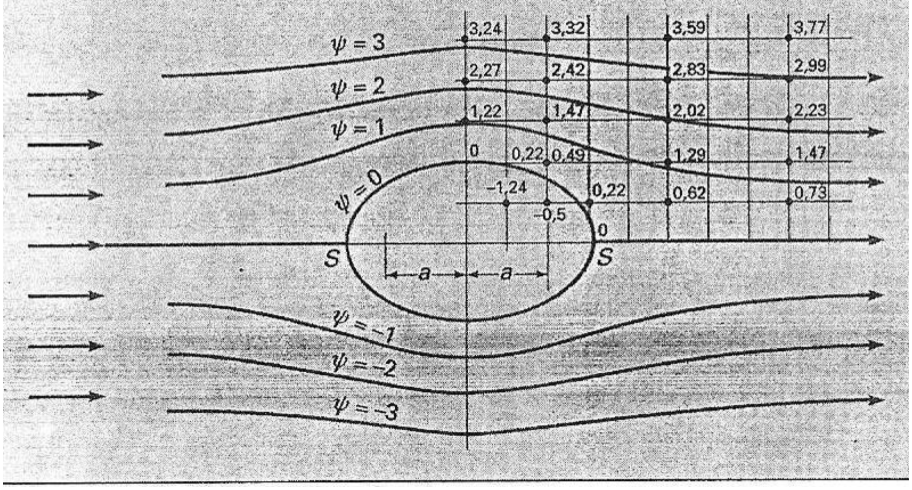
$v = \operatorname{sen}\theta\,(u + ua^2/r^2)$

para r = a (superficie del cilindro)

$v = 2u \operatorname{sen}\theta$

para θ = 0° y 180°; v = 0, para θ = 90° y 270° v= 2u

Campo fluido de una fuente y un sumidero de igual intensidad en un campo fluido rectilíneo uniforme. *S* representa un punto de remanso.



BIBLIOGRAFÍA

Mecánica de los fluidos con aplicaciones en ingeniería. Franzini- Finnemore
Mecánica de los fluidos. Streeter-Wylie-Bedford
Mecánica de los fluidos. Mataix
Mecánica de los fluidos. White
Mecánica de los fluidos, Cengel-Cimbala