

ONDAS ELASTICAS

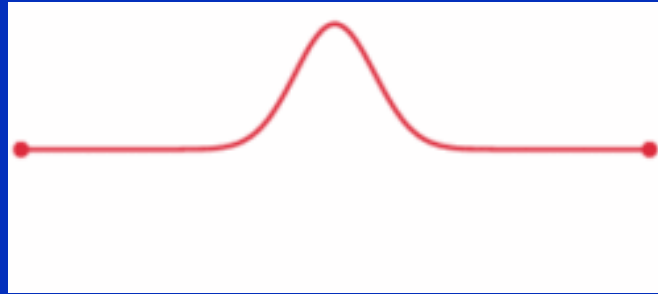
Si se produce una perturbación en un fluido ésta se manifiesta como una variación de presión que se propaga en el seno del fluido en forma de onda. La velocidad de propagación de la onda elástica es C o también llamada celeridad.

La velocidad de propagación depende del medio en el cual se produce la perturbación. Si se somete a un cuerpo a un esfuerzo de compresión, éste no se transmite instantáneamente a todo el cuerpo, sino que la perturbación se propaga a través del cuerpo con una velocidad finita, que depende del módulo de elasticidad volumétrico K (E_v).

E_v

$$K = - dP / (dV / V) = dP / (d\rho / \rho)$$

A medida que avanza la onda se producen variaciones locales de presión. Para definir la velocidad de propagación se considera al sistema estático, o sea, a la velocidad V se le opone una velocidad C (igual), y al movimiento esencialmente impermanente se lo transforma en permanente y se pueden aplicar las leyes de la aceleración y de la continuidad, para movimiento permanente.



Ley de la aceleración en una dirección, según Euler:

$$dV_x/dt = -1/\rho \delta P / \delta x \quad \xrightarrow{\text{En una dirección}} \quad -dP = \rho V dV$$

Ley de continuidad:

Considerando flujo compresible (ρ)

$$\text{div}(\rho V) = d(\rho V)/dx = 0 \quad d(\rho V) = 0$$

$$d\rho V + \rho dV = 0$$

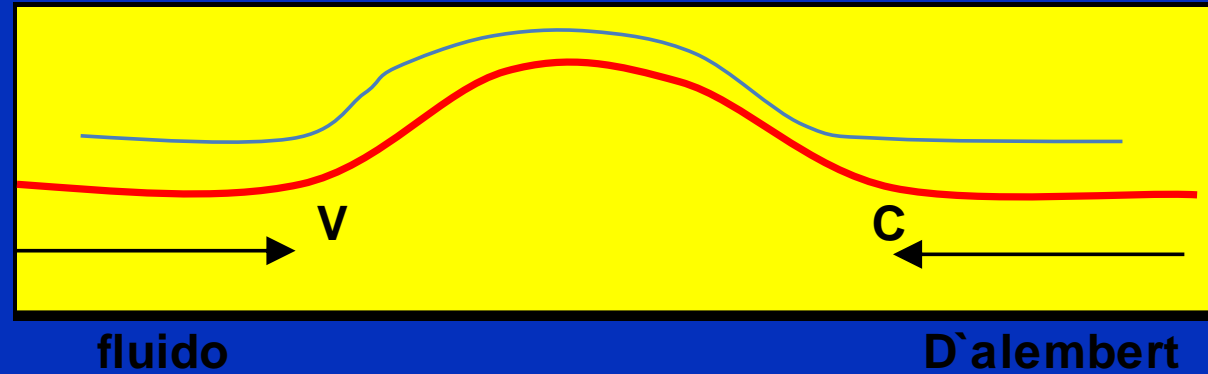
$$dV = (-) dP / \rho V$$

Del módulo Ev:

$$dV = (-) V d\rho / \rho$$

Igualando:

$$dP / \rho V = V d\rho / \rho$$



$$V = (dP / d\rho)^{1/2} = C$$

C es la velocidad de propagación de la onda elástica o celeridad de la onda. En función del módulo de elasticidad:

$$dP = K d\rho / \rho$$

$$C = (K / \rho)^{1/2}$$

K (Ev): módulo de elasticidad volumétrico

La celeridad depende del módulo de elasticidad volumétrico del medio en el cual se produce la perturbación y de su densidad. El sonido también se propaga en el medio con una velocidad C .

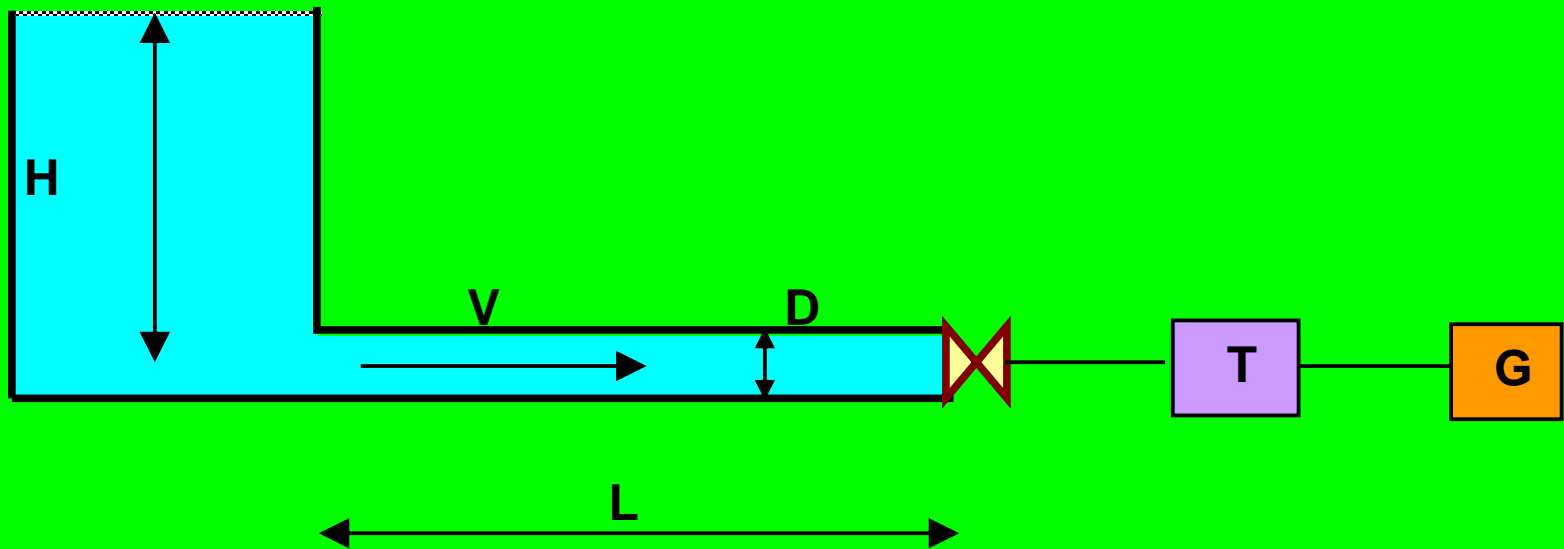
C aire ~ 330 m/s

C agua ~ 1420 m/s

GOLPE DE ARIETE

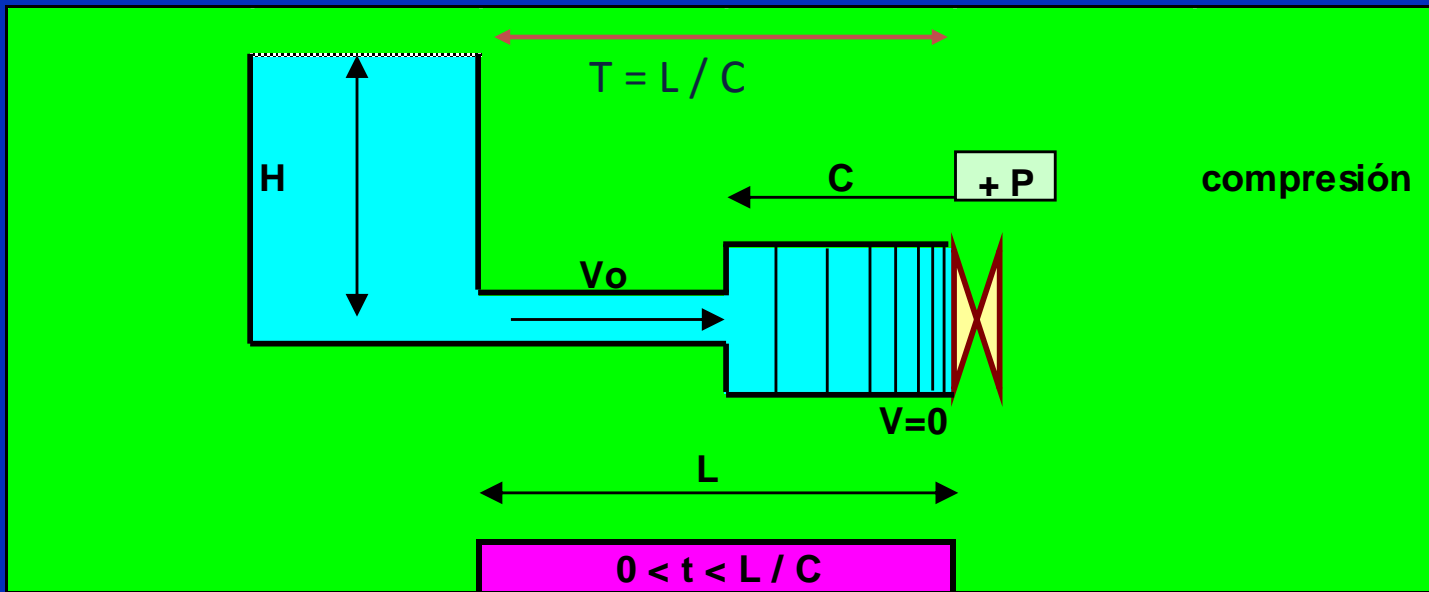
Una central eléctrica consiste en un embalse de grandes dimensiones, una tubería para que circule el agua y al final de la misma hay una turbina acoplada a un generador de corriente. Antes de la turbina hay una válvula que sirve en el caso de que el generador se quede sin carga tendiendo a acelerarse y a arrastrar a la turbina, con peligro de rotura. Para esto se usa la válvula, cortando el suministro de agua. Esto puede originar el golpe de ariete que es un fenómeno transitorio, en régimen variable. La tubería no se considera rígida ni el fluido incompresible.

Analizando 4 fases del fenómeno



1a FASE

Si se produce un inconveniente y se cierra instantáneamente la válvula, la masa de agua, que tiene una energía cinética, pasa a tener velocidad $V = 0$, transformándose en energía de presión, comenzando el fenómeno junto a la válvula. Se produce una onda de compresión que se propaga aguas arriba.



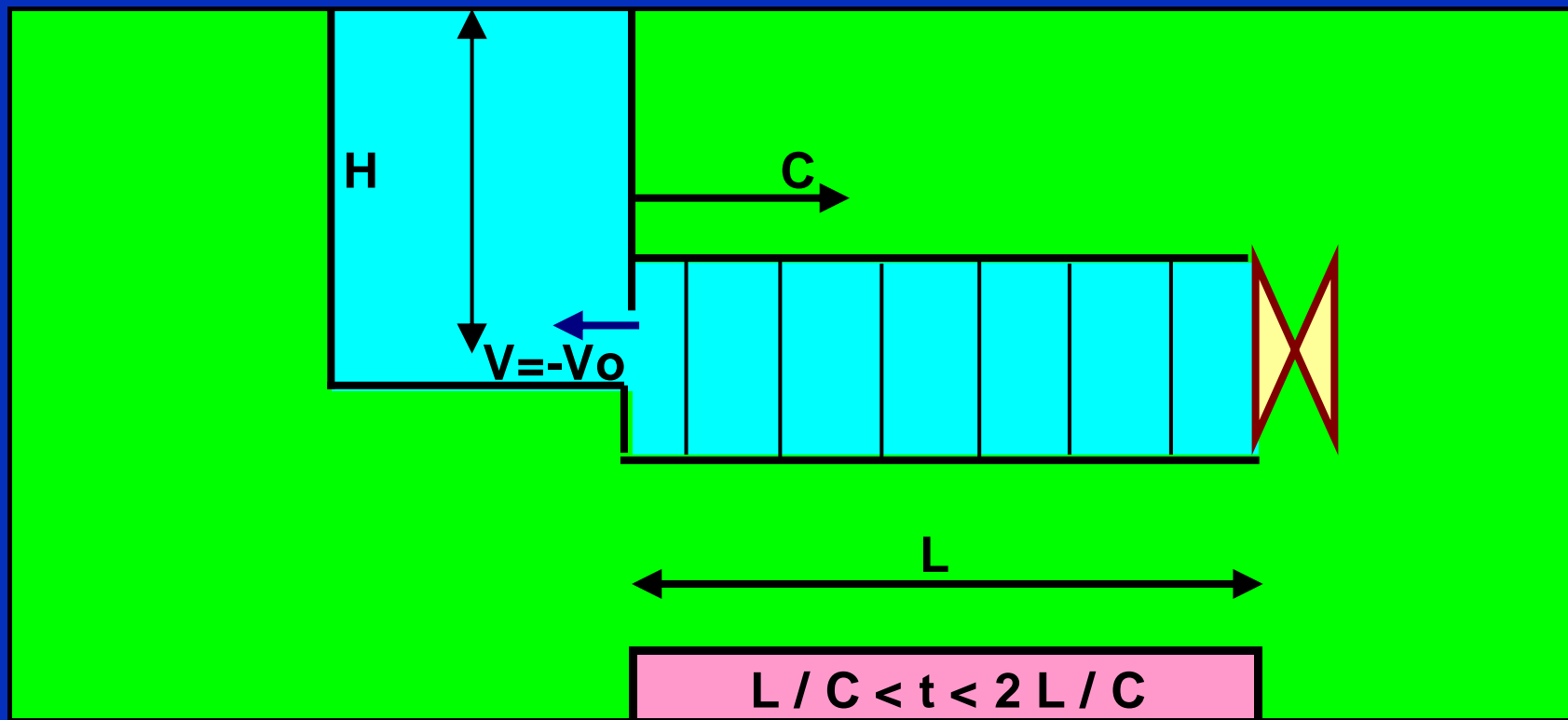
Junto a la válvula se produce una sobre presión ΔP y se genera una onda de compresión que se propaga aguas arriba a la velocidad C . Al tocar las sucesivas capas de fluido, éste se frena, $V = 0$, y se comprime, dilatando la tubería por presión interior.

La velocidad de cada "rodaja" de fluido se hace cero, originándose una onda elástica o de presión que se mueve desde la válvula hacia el embalse a una velocidad C . El tiempo entre que se cierra la válvula y la onda llega al embalse es: $0 < t < L/C$

En L/C el líquido está sobrepresionado y la tubería expandida. Si $t_0 =$ tiempo que tarda la onda en recorrer la distancia L , $t_0 = L/C$. Para $T = 4 t_0$, $4 L/C$, el ciclo se repite.

2a FASE

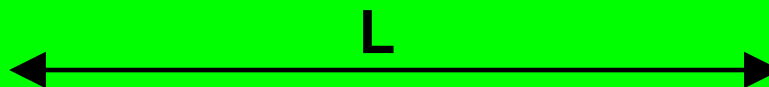
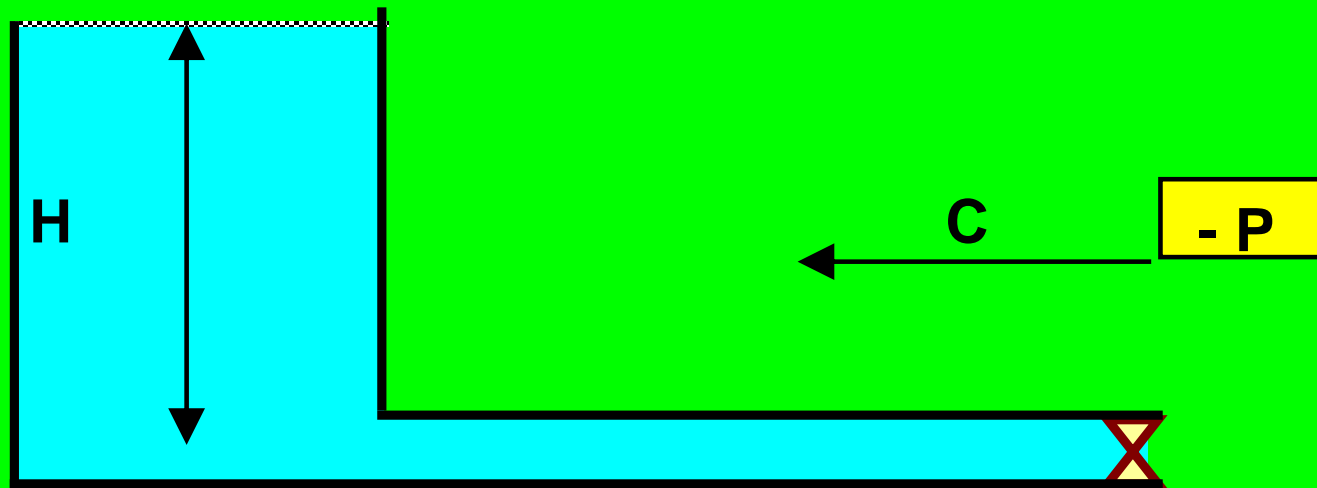
El embalse es de grandes dimensiones y se encuentra al aire libre. Existe un desequilibrio ya que a la derecha de la embocadura hay una sobrepresión y a la izquierda, la presión del estanque.



A partir de la primer rodaja que está junto al estanque, la presión tiende a disminuir y se produce una onda negativa (reflexión). El líquido se mueve con velocidad V hacia la izquierda y la onda con celeridad C , despresurizando la cañería, hacia la derecha, hasta llegar a la presión original. El líquido comienza a moverse hacia el estanque, hasta llegar a la válvula, volviendo la cañería a su diámetro original.

3 a FASE

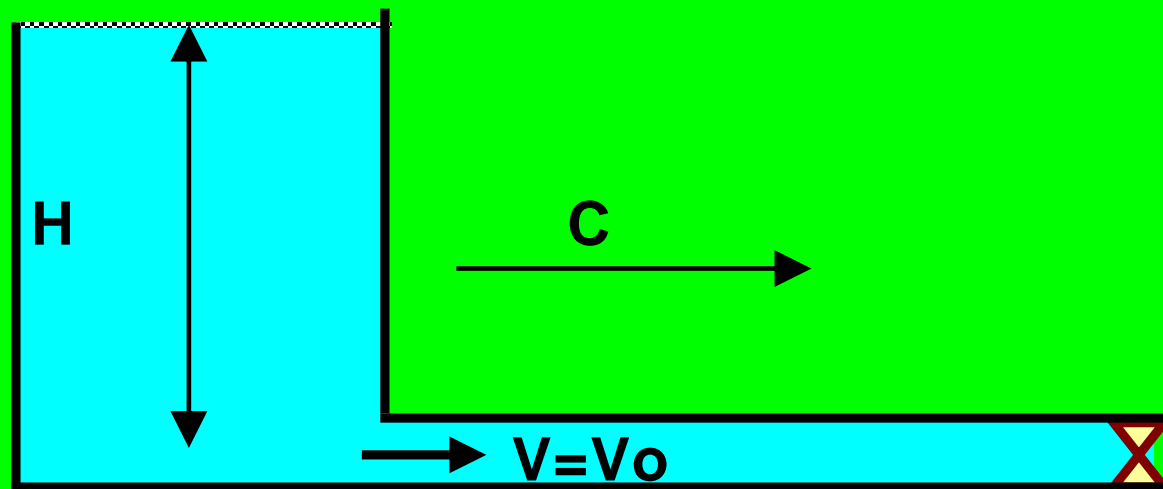
Cuando la onda depresiva llega junto a la válvula, se refleja, y esa depresión se transmite aguas arriba hacia el embalse. A medida que la onda va tocando las rodajas hacia el embalse, las detiene, el fluido se expande y la tubería se contrae. Cuando la onda llega al depósito en $3 L / C$, la tubería corre el riesgo de aplastarse. Si la presión en la tubería es menor que la tensión de vapor del fluido, este vaporizará y podrá originar cavitación.



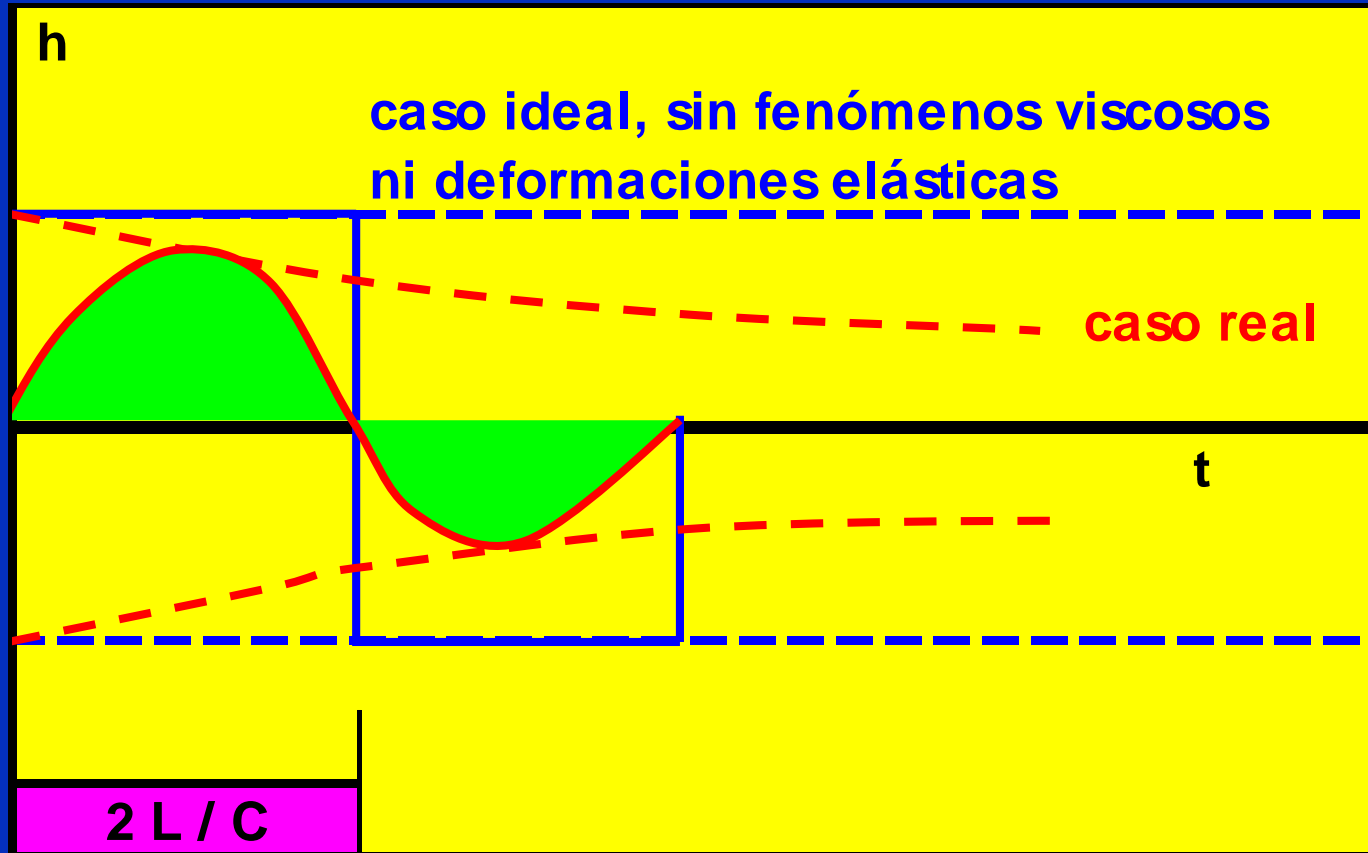
$$2 L / C < t < 3 L / C$$

4 a FASE

En el instante $3 L/C$ en que la onda negativa llega al embalse, el fluido se encuentra en reposo y en desequilibrio de presiones, por lo que comienza a moverse hacia adentro de la tubería con una velocidad V_0 . El líquido y la tubería vuelven a sus condiciones iniciales. Luego la masa fluida choca contra la válvula y se reinicia el fenómeno.



$$3 L / C < t < 4 L / C$$



Por efectos de la viscosidad del fluido y la elasticidad de la cañería, las amplitudes se van amortiguando en el caso real. La máxima presión que soporta la válvula es la misma si ésta se cierra en un lapso menor al que tarda la onda en ir hasta el embalse y reflejarse hasta la válvula. Es decir, no alcanza a sobrepasarla antes de que se cierre. Este tiempo es:

$$t \text{ de cierre rápido} < 2L / C$$

$$t \text{ de cierre lento} > 2L / C$$

Para evitar el golpe de ariete se suelen colocar chimeneas de equilibrio, amortiguadores, etc.

Valor de la sobrepresión:

Debido al principio de conservación de la energía, la energía cinética que trae el agua en la tubería se transforma en:

Trabajo de compresión del líquido.
Trabajo de expansión de la cañería.

$$E_c = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} \gamma / g A L V^2 \quad (1)$$

$$K = \Delta P / (\Delta V / V) \quad E_v$$

$$\Delta V = \Delta P V / k = \gamma h A L / K$$

$$T_{cl} = \Delta V \Delta P / 2$$

trabajo de compresión del líquido (T_{cl});
presión media ($\Delta P / 2$)

$$T_{cl} = \gamma h / 2 \quad \gamma h A L / K \quad (2)$$

En una tubería sometida a presión interior:

$$T = P r \quad \text{fuerza por unidad de longitud (T); r = radio de la tubería}$$

$$T = \gamma h D / 2$$

si el espesor de la cañería es t, la tensión unitaria será:

$$T / t = \gamma h D / 2 t$$

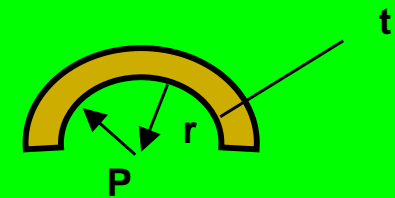
el alargamiento unitario será:

$$T / t E = \gamma h D / 2 t E$$

el alargamiento total será:

$$T / t E \pi D = \gamma h D^2 \pi / 2 t E$$

E módulo de elasticidad del material de la cañería



$$\sigma = E \mathcal{E}$$

Tomando una fuerza media $T L / 2$, el trabajo de expansión de la cañería (Tec) será:

$$\text{Tec} = \frac{T L}{2} \gamma h D^2 \pi / 2 t E$$

Fuerza media por alargamiento total.

$$\text{Tec} = \gamma h D L / 4 \gamma h D^2 \pi / 2 t E$$

3

ENERGÍA CINÉTICA

TRABAJO DE COMPRESIÓN
DEL LÍQUIDO

TRABAJO DE EXPANSIÓN
DE LA CAÑERÍA

1

=

2

+

3

$$\frac{1}{2} \gamma / g A L V^2 = \gamma h / 2 \gamma h A L / K + \gamma h D L / 4 \gamma h D^2 \pi / 2 t E$$

DESPEJANDO "h" DE LA ANTERIOR:

$$h = V/g \left[K/\rho / (1 + KD/tE) \right]^{1/2}$$

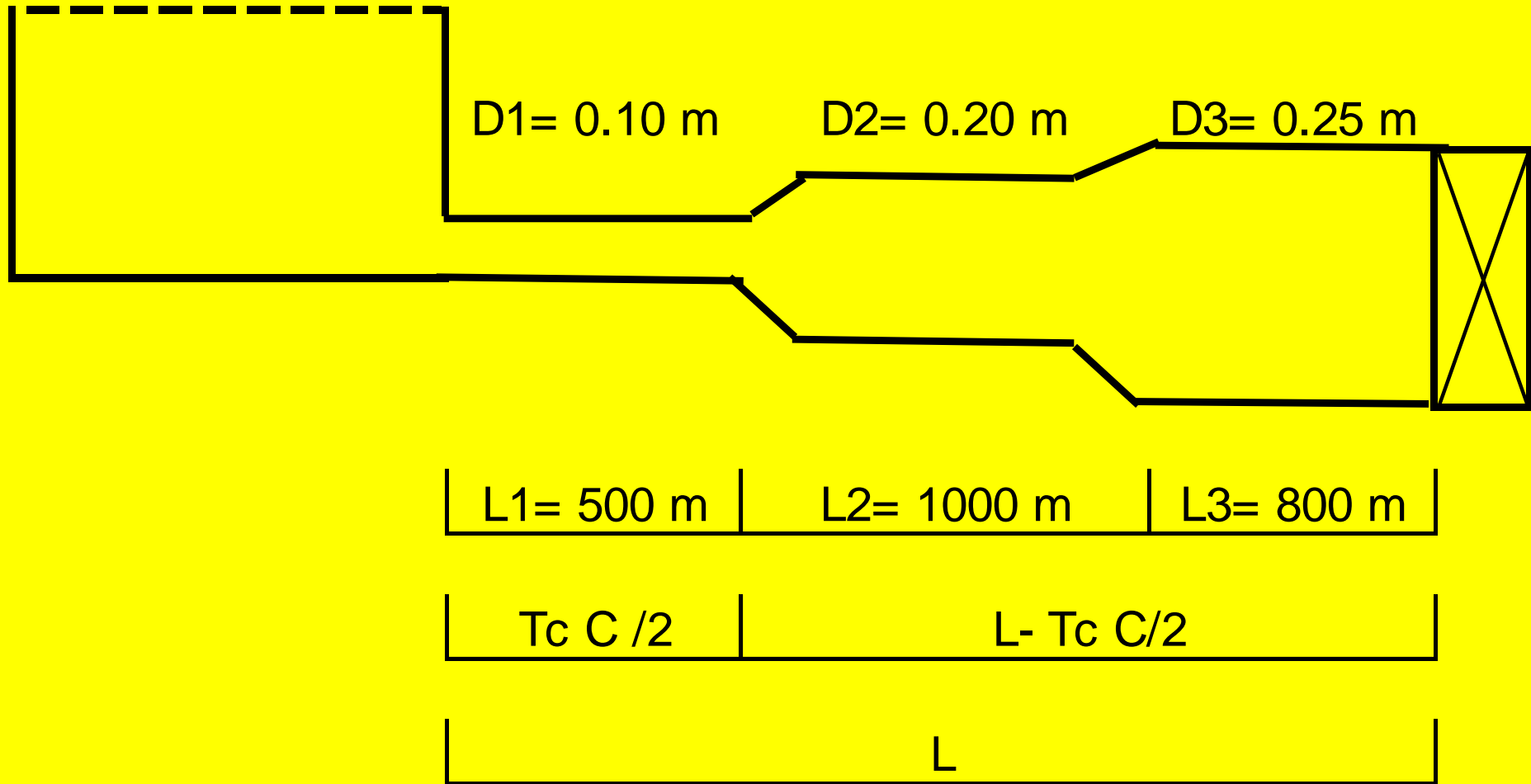
Valor h de la sobrepresión cuando se cierra la válvula.

Las ondas elásticas se propagan a una velocidad:

$$C = (K/\rho)^{1/2} \quad K = Ev$$

EJEMPLO DE CÁLCULO

En una cañería de fundición que conduce agua según el siguiente esquema, cuál sería la sobrepresión si se cierra la válvula en un tiempo de 3 seg y cuál si se cierra en 10 seg
La velocidad de circulación antes de la válvula (abierta) es de $V = 0.80$ m/s.



$$C_{\text{prom}} = L / (\sum L_i / C_i)$$

$$K_{\text{agua}} = 2.14 \times 10^8 \text{ Kg/m}^2$$

$$\gamma_{\text{agua}} = 1000 \text{ Kg/m}^3$$

Cálculo de la celeridad de la onda:

$$C = 9900 / (48.3 + 10^{10} / E \cdot D/e)^{1/2} \quad \text{cte} = 10^{10} / E \cdot v$$

Para agua y cañería de fundición: cte = 1

$$\text{cte} = 10^{10} / 2 \cdot 10^{10} = 0.5 \text{ Acero}$$

$$\text{cte} = 10^{10} / 10^{10} = 1 \text{ Fundición}$$

$$\text{cte} = 10^{10} / 2 \cdot 10^9 = 5 \text{ Hormigón}$$

$$C1 = 9900 / (48.3 + 10^{10} \cdot 0.10 / 0.01)^{1/2} = 1297 \text{ m/s}$$

$$C2 = 9900 / (48.3 + 0.2 / 0.01)^{1/2} = 1198 \text{ m/s}$$

$$C3 = 9900 / (48.3 + 0.25 / 0.01)^{1/2} = 1156 \text{ m/s}$$

Si E = infinito, cañería indeformable:

$$C = 9900 / 48.3^{1/2} = 1424 \text{ m/s}$$

$$C = 2300 / (5000/1297 + 1000/1198 + 800/1156)$$

C aprox 1210 m/s

Por debajo de la C para cañería indeformable (1424 m/s)

C =	1,210	m/s
L =	2,300	m
ΔP para	3	seg
ΔP para	10	seg
V =	0.8	m/s

$$C = (K / \rho)^{1/2} / (1 + (K D / E e))^{1/2}$$

$C = (K / \rho)^{1/2}$ para $E = \text{infinito}$
cañería indeformable

$$F = \rho Q (V_2 - V_1)$$

$$dP A = \rho Q dV$$

$$dP A = \rho C A dV$$

$$dH = C dV / g$$

$$H = C V / g$$

$V_2 = 0$ (cierre rápido)

divido por γ

1) Cálculo de la sobrepresión para un tiempo de cierre de 3 seg:

$$\begin{array}{l} 2L/C = 3.80 \text{ s} \quad T_c < 2L / C \\ 3 \text{ seg} < 3.8 \text{ seg} \quad (\text{cierre rápido}): \end{array}$$

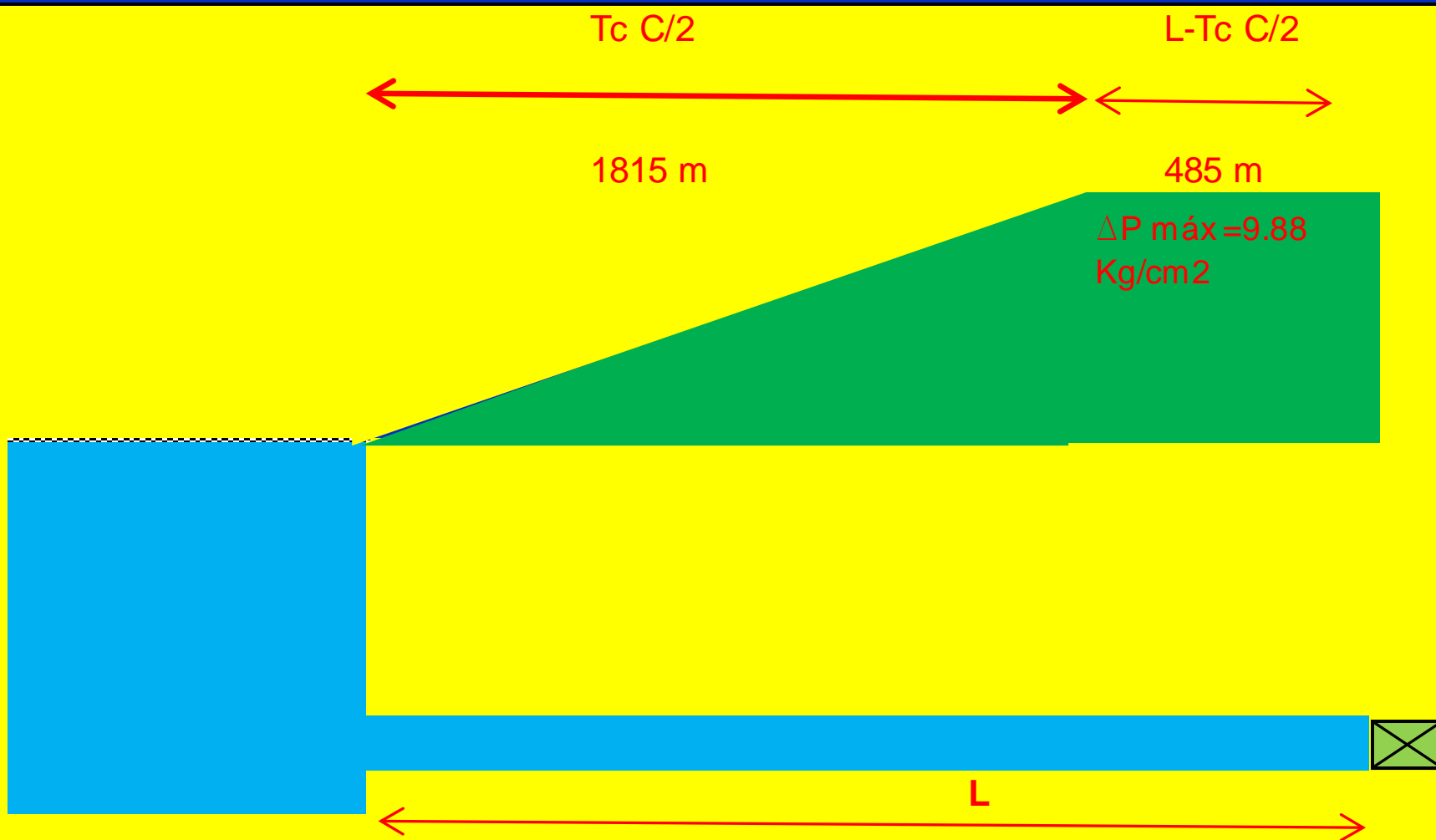
$$\Delta h = C V / g = 98.8 \text{ mca}$$

$$\Delta P = 9.88 \text{ Kg/cm}^2$$

Cálculo de la distancia:

$$L = T_c C/2 = 1,815 \text{ m}$$

$$L - TC/2 = \frac{485}{2,300} \text{ m}$$



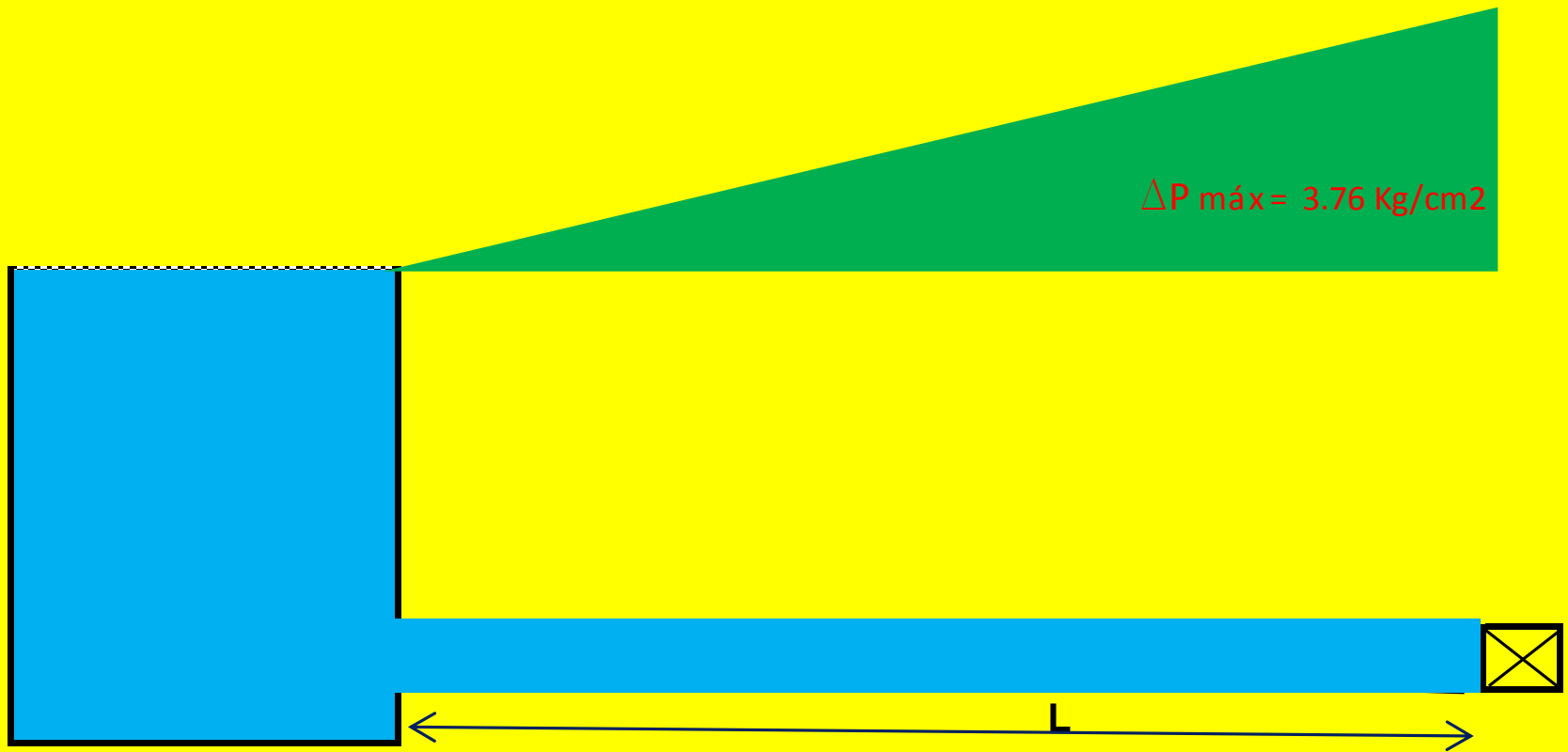
2) Cálculo de la sobrepresión para 10 seg > 3.8 seg
(cierre lento):

$T_c = 2L / C$ $C = 2L / T_c$ La válvula no está totalmente cerrada cuando pasa la onda. No es igual la masa sometida a impulso.

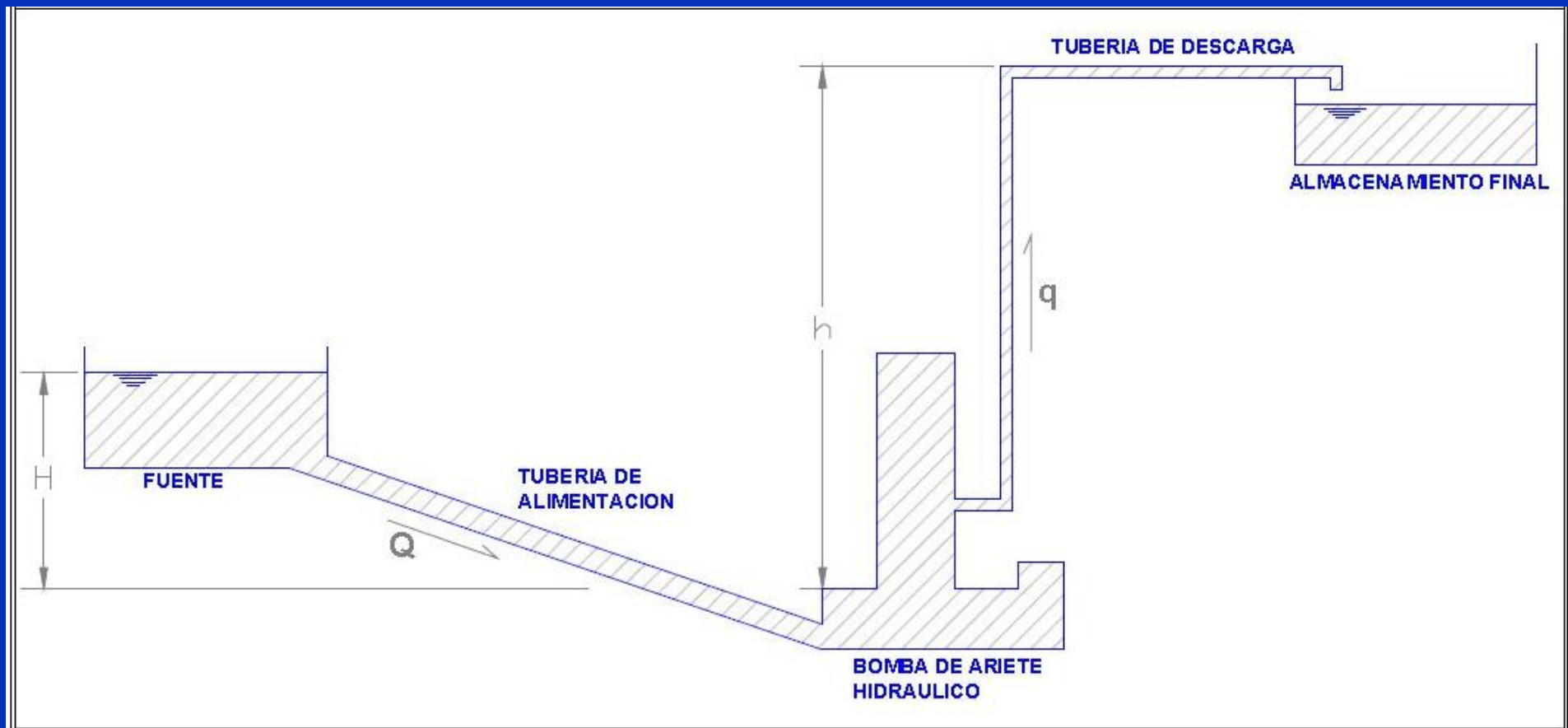
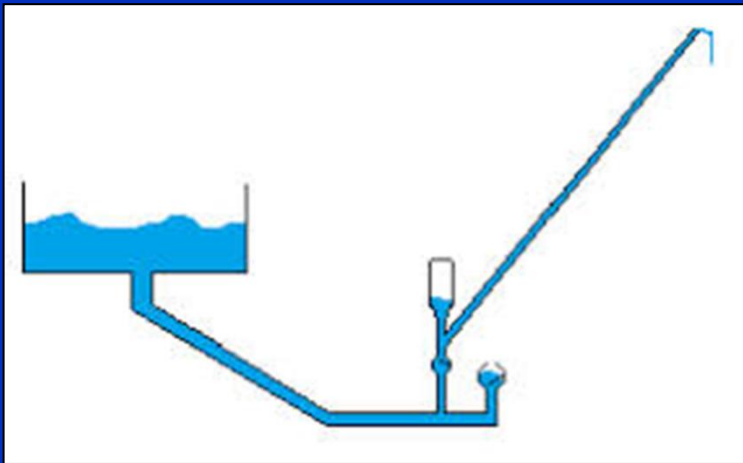
$$\Delta h = 2L / T_c \quad V/g \quad 2 * 2300 * 0.8 / 9.8 * 10$$

$$\Delta h = 37.55 \text{ mca}$$

$$\Delta P = 3.76 \text{ Kg/cm}^2$$



APROVECHAMIENTO DE RECURSOS



Como resultado se tendrá un “caudal de descarga” q una “altura de descarga” h

SISTEMAS ELECTROMECÁNICOS PROGRAMABLES



VALVULA CONTRAGOLPE
DE ARIETE

FLUJO SUBSONICO Y SUPERSONICO

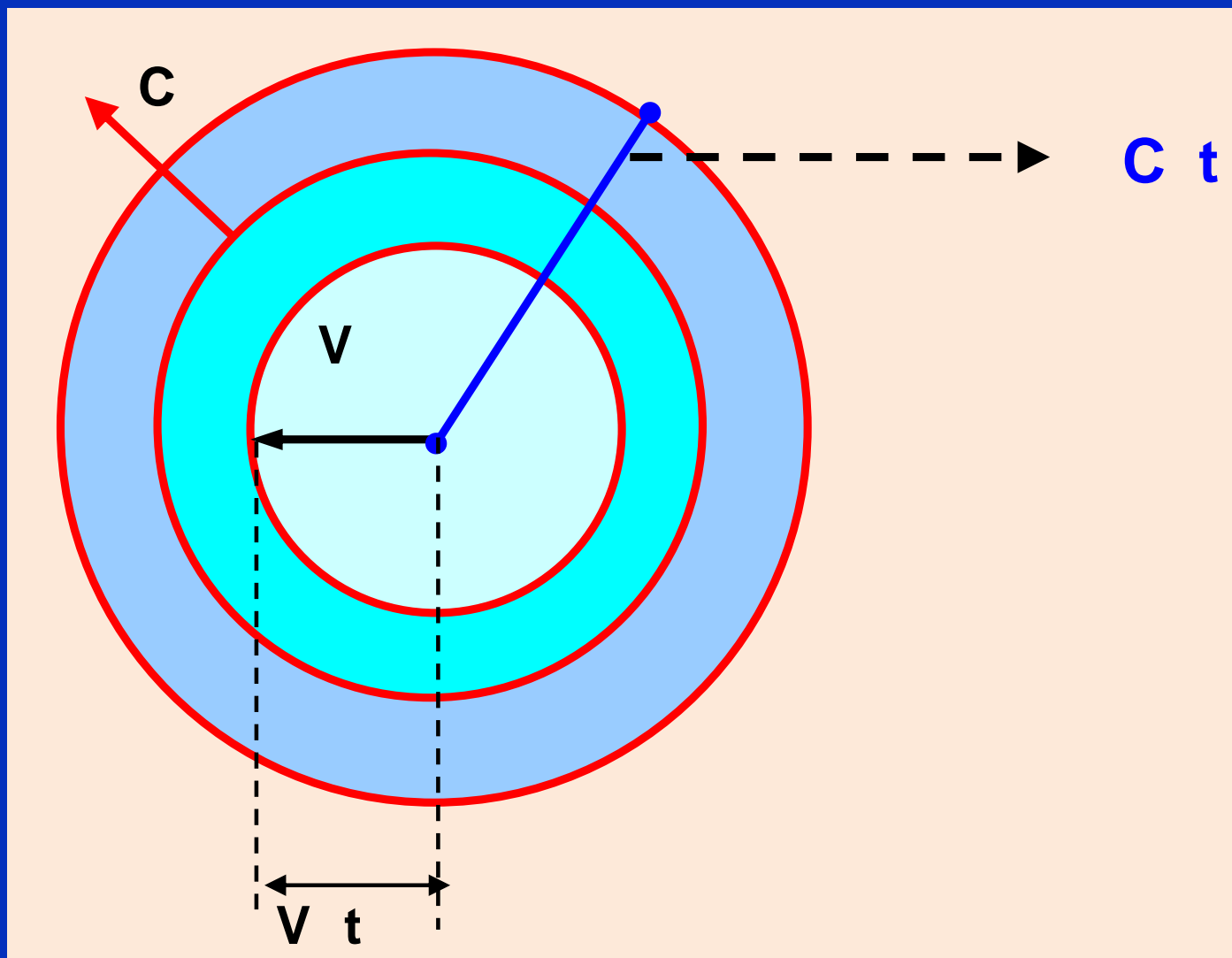
Siendo el número de Mach el cociente entre la velocidad promedio del flujo y la velocidad del sonido.

$$M = V / C$$

Si un objeto se mueve con velocidad $V < C$, o sea, $M < 1$: flujo subsónico, la perturbación se propaga según ondas esféricas:

$$V < C$$

$$M < 1$$

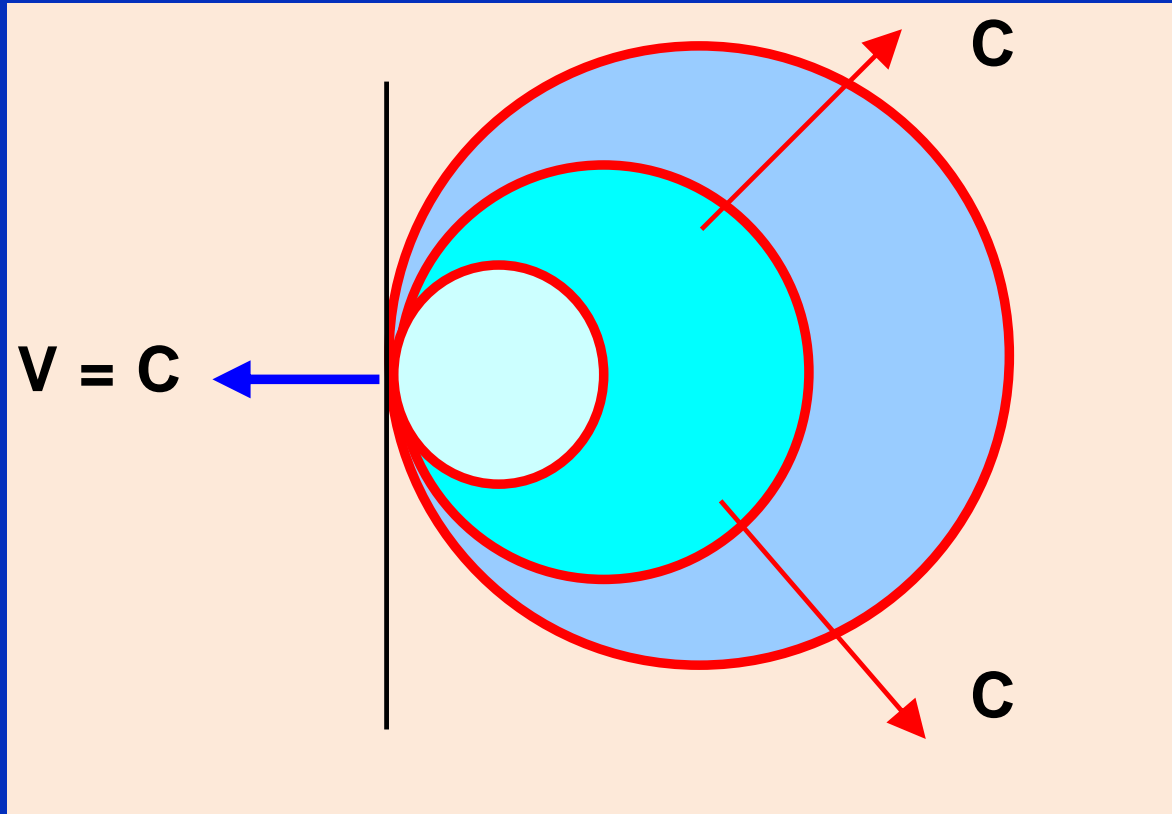


Las ondas se alejan del objeto con velocidad $C > V$.

La onda viaja delante del objeto produciendo modificaciones en el medio antes que éste llegue. La onda recorre una distancia $C t$, mientras que el objeto recorre $V t$.

Si $V = C$ $M = 1$ Flujo Sónico

Las ondas no se propagan delante del objeto y se concentran en la proa del mismo.

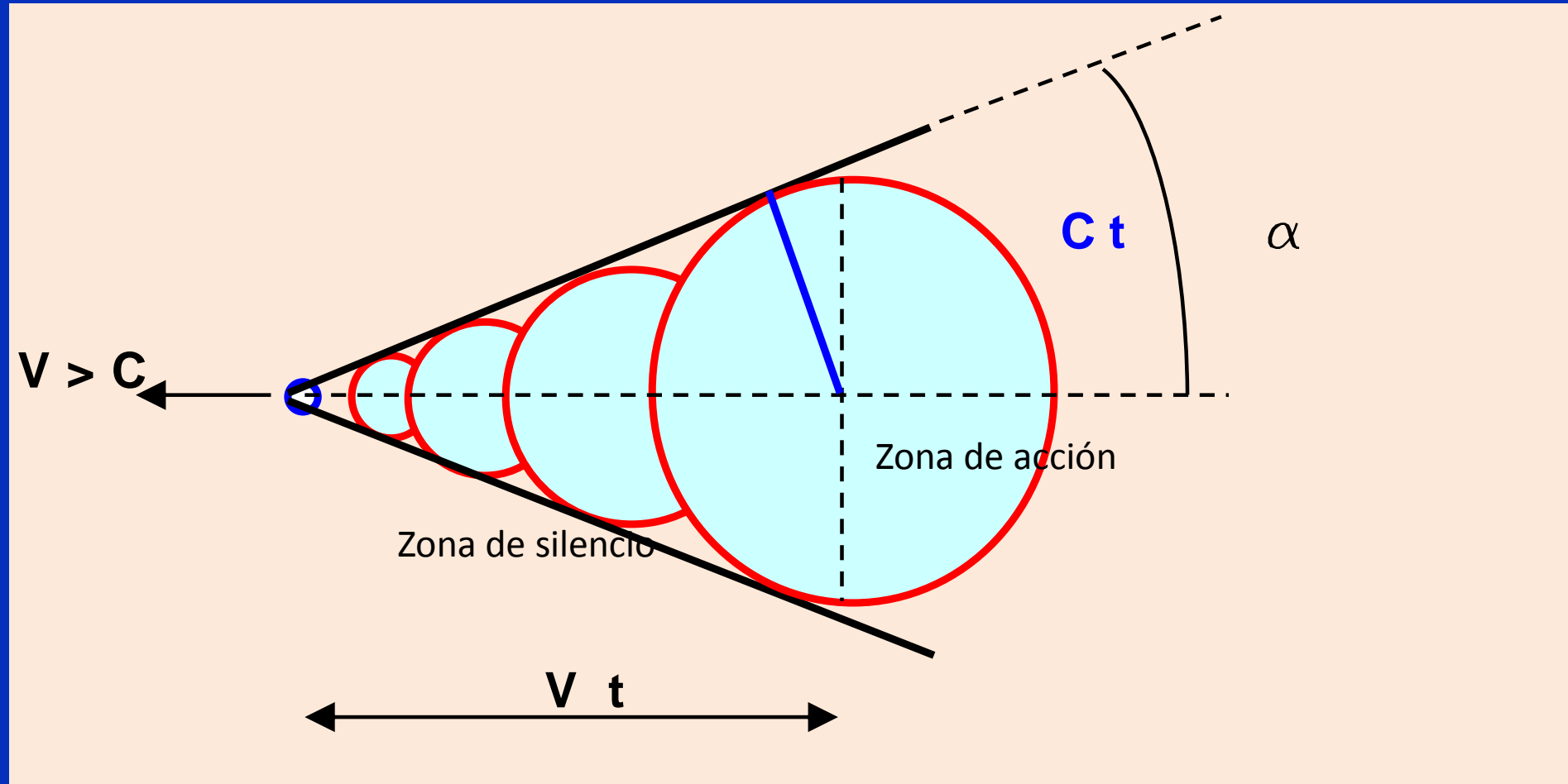


La tangente a los círculos que pasan por el objeto se llama frente de onda u onda de choque porque a través de ella hay un brusco cambio de densidad. Es lo que se llama barrera del sonido.

Si $V > C$

$M > 1$

Flujo supersónico



El cuerpo se mueve más rápido que las ondas esféricas que emite, produciéndose un frente de onda cónico con vértice en la proa del cuerpo. Las generatrices determinan un cono

El ángulo del cono de Mach es:

$$\text{sen } \alpha = C_t / V_t = 1 / M$$

A mayor V, mayor M y menor ángulo.

En el flujo subsónico se limita a estudiar la forma del objeto para evitar el desprendimiento de la capa límite, lo cual resulta más determinante en la popa que en la proa.

En el movimiento supersónico es a la inversa ya que la proa determina la abertura del cono de Mach, quedando el objeto dentro del mismo.

TOBERAS



Fig. 2.22 Detalle toberas del MiG 1.44

FLUJO ISOENTRÓPICO

Corresponde a un flujo adiabático y sin rozamiento. Entropía constante.

No viscoso ($\mu = 0$)

La tobera es relativamente corta por lo que no se considera rozamiento

Adiabático ($dQ = 0$)

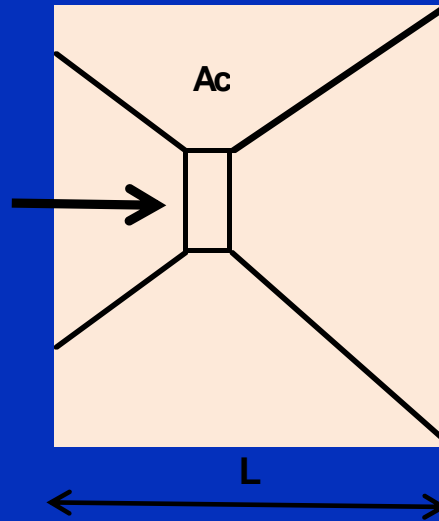
Al ser corta el intercambio de calor es aproximadamente nulo

Gas perfecto ($P/\rho = RT$)

El rendimiento de la tobera es cercano a 100% por lo que se puede considerar gas ideal (perfecto)

Permanente ($\delta V/\delta t = 0$)

Unidimensional



Aplicando Bernoulli en forma genérica:

$$\int dP/\rho + gz + V^2 = \text{cte}$$

despreciando la variación de z:

$$\int dP/\rho + V^2/2 = \text{cte}$$

Diferenciando:

$$dP/\rho + v dV = 0$$

La celeridad de la onda es:

$$C = (dP/d\rho)^{1/2}$$

$$dP = C^2 d\rho$$

Reemplazando:

$$C^2 d\rho/\rho + V dV = 0 \quad 1$$

Por la ecuación de continuidad

$$\rho V A = \text{cte}$$

Tomando logaritmos:

$$\ln \rho + \ln V + \ln A = \text{cte}$$

Diferenciando:

$$d\rho/\rho + dV/V + dA/A = 0 \quad 2$$

Despejando de 1 y 2 e igualando:

$$-V dV/C^2 = d\rho/\rho$$

$$-(dV/V + dA/A) = d\rho/\rho$$

$$VdV / C^2 = dV/V + dA/A$$

$$dA/A = dV (V/C^2 - 1/V)$$

$$dA/dV = A/V (V^2/C^2 - 1)$$

$$dA/dV = A/V (M^2 - 1)$$

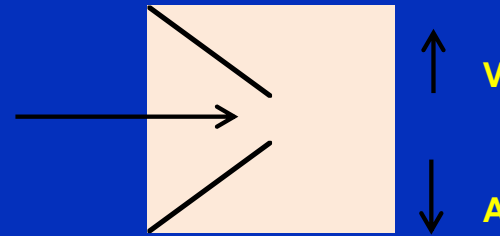
$$dA/dV = A/V (M^2 - 1)$$

FLUJO SUBSONICO

Si $M = V/C < 1$:

dA/dV es(-)

significa que el área y la velocidad varían en forma contraria

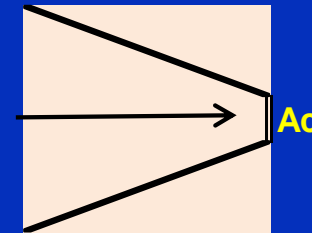


FLUJO SÓNICO

$M = V/C = 1$:

$dA/dV = 0$

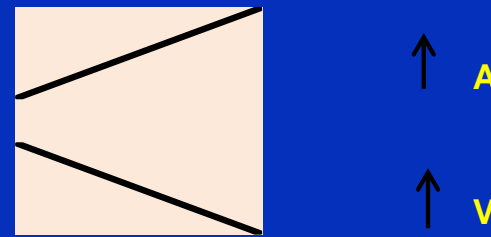
Hay un máximo o un mínimo máxima velocidad para mínima área. Sólo allí, en el área crítica puede ser sónico



FLUJO SUPERSÓNICO dA/dV es (+)

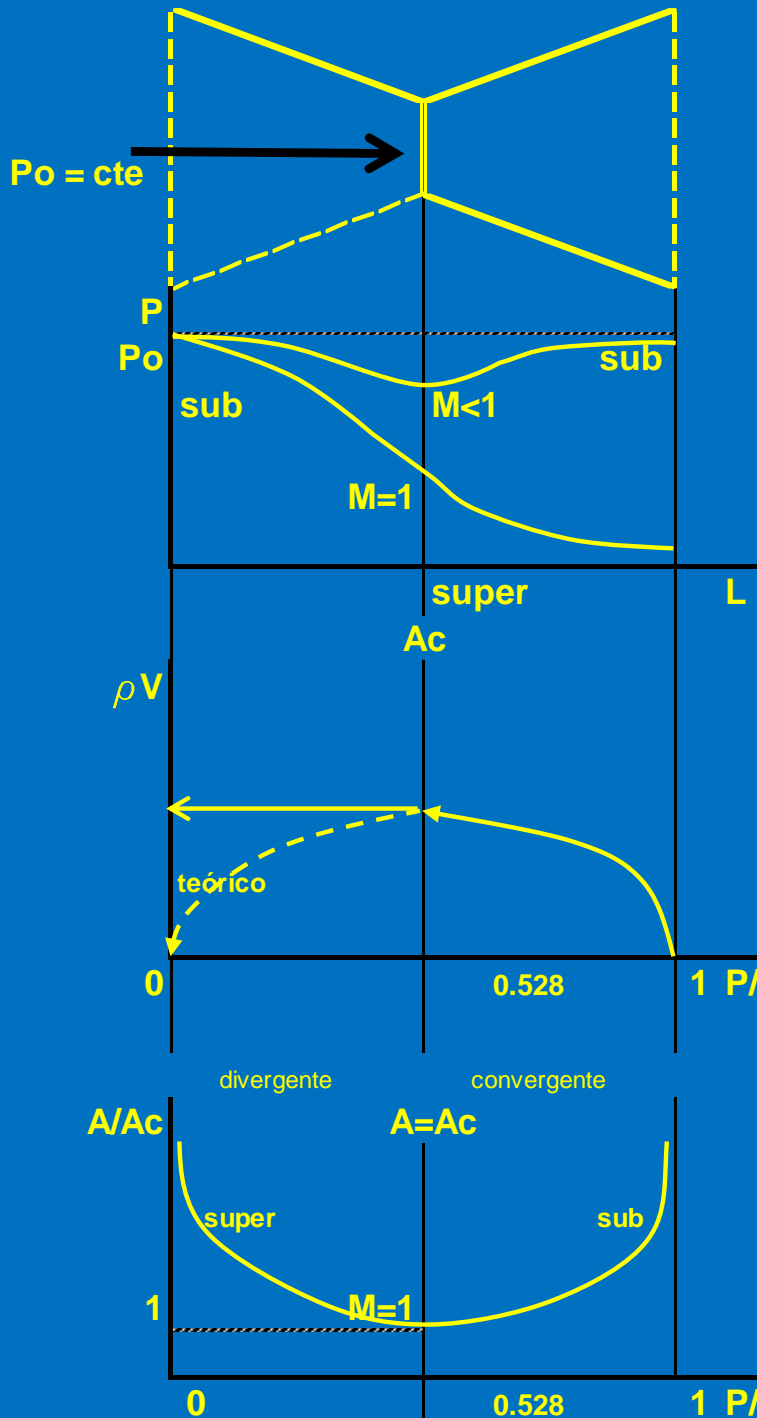
$M = V/C > 1$:

El área varía en igual sentido que la velocidad.



A partir de un fluido en reposo, para alcanzar velocidades supersónicas, la tobera debe ser convergente- divergente y la máxima velocidad en la garganta es la del sonido, cuando $V=V_c$.

En función de la presión a la entrada y a la salida: considero $P_0 = \text{cte}$ y P variable a la salida.



P variable (se va disminuyendo)

La energía cinética se transforma en energía de presión con pérdidas en el caso del Venturi.

Si se alcanza C en el A_c , la presión continúa disminuyendo ($M=1$)

Graficando la masa por unidad de área a medida que disminuimos P (P/P_o), el caudal másico aumenta hasta A_c , donde es máximo. Luego, teóricamente debiera disminuir, pero en la práctica se mantiene constante ya que si $P/P_o=0$, sería $P=0$, $\rho=0$ y $m=0$, lo que no ocurre

El valor crítico de P/P_o para el aire es 0.528

Las tres relaciones de presión crítica para una tobera convergente – divergente dependen de su geometría, así como también de la relación de calores específicos del gas que fluye. El primer paso para el cálculo del flujo a través de una tobera convergente – divergente es clasificar el flujo mismo. Esto se hace calculando las tres relaciones de presión crítica, y comparándolas con la relación real de la contrapresión con la presión de suministro, identificado así el régimen de flujo.

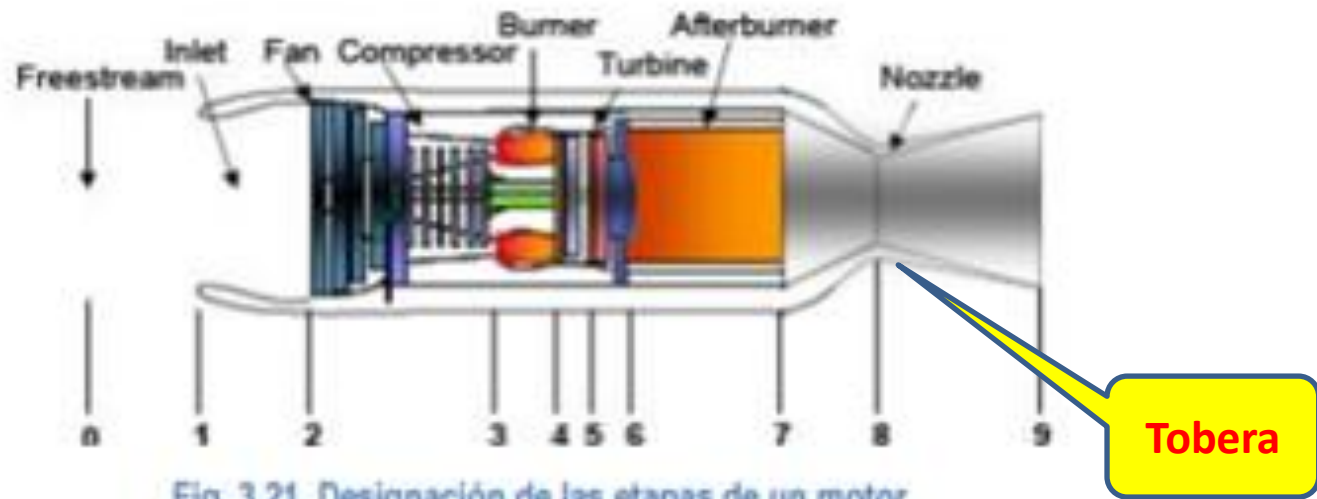


Fig. 3.21. Designación de las etapas de un motor

$$c = \sqrt{k \cdot R \cdot T}$$

velocidad del sonido para gas ideal

$$Ma = \frac{v}{c}$$

número de Mach

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{Ma}\right)$$

ángulo del cono de Mach

$$h_0 - \left(h + \frac{v^2}{2}\right) = 0$$

entalpía en el punto de estancamiento

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{1 + \left[\frac{(k-1)}{2}\right] \cdot Ma^2}$$

temperatura de un gas ideal en cualquier punto de un conducto convergente divergente para flujo isentrópico en función de T_0 , de estancamiento

$$p \cdot \rho \cdot T = p_0 \cdot \rho_0 \cdot T_0$$

ecuación de estado

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

ecuación de evolución adiabática

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left[\frac{1}{1 + \left[\frac{(k-1)}{2}\right] \cdot Ma^2}\right]^{\frac{1}{k-1}}$$

densidad de un gas ideal en cualquier punto de un conducto convergente divergente para flujo isentrópico en función de ρ_0 de estancamiento

$$\frac{p}{p_0} = \left[\frac{1}{1 + \left[\frac{(k-1)}{2}\right] \cdot Ma^2}\right]^{\frac{k}{k-1}}$$

presión de un gas ideal en cualquier punto de un conducto convergente divergente para flujo isentrópico en función de p_0 de estancamiento

$$Ma := 1$$

Para $Ma=1$ se tiene los valores críticos de ρ^* , p^* y T^*

Un avión que vuela a 2000 m de altitud pasa directamente por arriba de un observador.
 Si el avión se desplaza a $M=1.5$ y la temperatura ambiente es 10°C . Cuántos segundos tiene que esperar el observador antes de escuchar el sonido?

$T =$	10	273	283	$^{\circ}\text{K}$
$k = C_p/C_v$	$k_{\text{aire}} =$		1,410	
$M =$			1,5	
$z =$			2.000	m
$c =$			338	m/s
$c = (k R_{\text{part}} T_{\text{abs}})^{1/2}$ Cálculo c				

$P v = R T$ $v = 1/ \rho$				
$R = \text{cte particular del gas}$				
$R = P v/ T$	$\frac{\text{N m}}{\text{Kgmasa } ^{\circ}\text{K}}$	N/m^2	m^3/Kgmasa	$1/^{\circ}\text{K}$
		N	m^3	1.000
		m^2	Kgmasa	$^{\circ}\text{K}$
aire:	PM	$R_{\text{part}}(\text{Nm/kgmasa}^{\circ}\text{K})$	$k = C_p/C_v$	
	29	287	1.410	
		$\text{m}^2 / \text{seg}^2 * ^{\circ}\text{K}$		

$$c = 338 \text{ m/s} \quad \text{Cálculo de c}$$

$$V = M * c = 507,616 \text{ m/s} \quad \text{Cálculo de V}$$

$$1/M = 0,667$$

$$\alpha = \text{arco seno } (1/M) \quad \text{Cálculo de alfa}$$

$$\alpha = 0,72973 \quad 41,8$$

$$\tan \alpha = 0,894$$

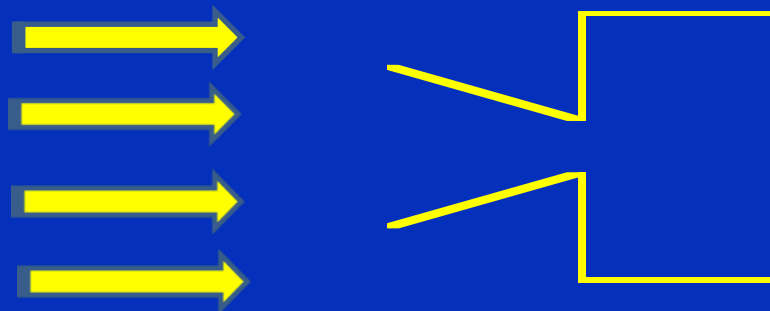
$$\text{dist} = Z / \tan \alpha$$

$$d = V * t$$

$$d = 2.236,1 \text{ m} \quad \text{Cálculo de la distancia}$$

$$t = d/V = 4,405 \text{ seg} \quad \text{Cálculo del tiempo}$$

Por un conducto convergente pasa aire de manera estable de condiciones atmosféricas normales hasta un tubo receptor. El área mínima de la sección transversal de flujo en la garganta del conducto convergente es $1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$. Determinar el caudal másico a través del ducto si la presión en el receptor es a) 80 KPa abs y b) 40 KPa abs.



$$G_m = \rho g \cdot A_g \cdot v_g$$

$P_0 =$	1	atm =	101.325	K Pa	101,325
$T_0 =$	288.15	$^{\circ}\text{K}$	parámetros de estancamiento		
$\rho_0 =$	1.23	Kg/m^3	$T_0 = 15^{\circ}\text{C}$		
$A_g =$	0.0001	m^2			
$k =$	1.401				

El aire evoluciona subsónico por el conducto. Para un valor de presión en la garganta igual a la presión crítica se tendrá $M=1$ en la garganta. Para un valor inferior, la velocidad no puede ser mayor en un conducto convergente por lo que la presión en la garganta sigue siendo la presión crítica. Para una presión superior a la crítica, el valor de $M>1$. Luego, es útil conocer la presión crítica:

$$P_c = P_0 \left\{ \frac{1}{\left(1 + \left\{\frac{K-1}{2}\right\} M^2\right)^{k/k-1}} \right\}$$

1.201

0.833

0.528

T/T_0

P/P_0

$P_c =$

53.51

kPa

$P_c/P_0 =$

0.528

a) 80 kPa en la garganta

$$P_g = 80 \text{ kPa}$$

$$P_g = P_0 \left\{ \frac{1}{1 + \left\{ \frac{(K-1)}{2} \right\} * M^2} \right\}^{k/k-1}$$

$(k-1)/2$	0,2005	101,3 kPa/atm
$P_g/P_0 =$	0,7895	
$k/(k-1)$	3,4938	
	0,9346	
	0,7895	
$M_g =$	0,591	

Mayor que 0.528

$$T_g = T_0 / (1 + \left\{ \frac{(k-1)}{2} \right\} * M^2)$$

$$T_g = 269,304 \text{ } ^\circ\text{K}$$

$$C_g = (k * R_{part} * T_g \text{ abs})^{1/2}$$

$$C_g = 329,1 \text{ m/s}$$

$$V_g = M * C_g = 194,405 \text{ m/s}$$

b) $p = 40 \text{ kPa}$, valor menor que el crítico,
entonces:

$$P_g = P_c$$

$$P_g = P_0 \left\{ \frac{1}{1 + \left\{ \frac{(K-1)}{2} \right\} * M^2} \right\}^{k/k-1}$$

$$P_c = P_0 \left\{ \frac{1}{1 + \left\{ \frac{(K-1)}{2} \right\} * 1} \right\}^{k/k-1}$$

M en la garganta:

$$M_g = 1$$

Valor máximo en la garganta

$$T_g = T_0 / (1 + \left\{ \frac{(k-1)}{2} \right\} * M^2)$$

$$T_g = 240,02 \text{ } ^\circ\text{K}$$

Disminuye la t°

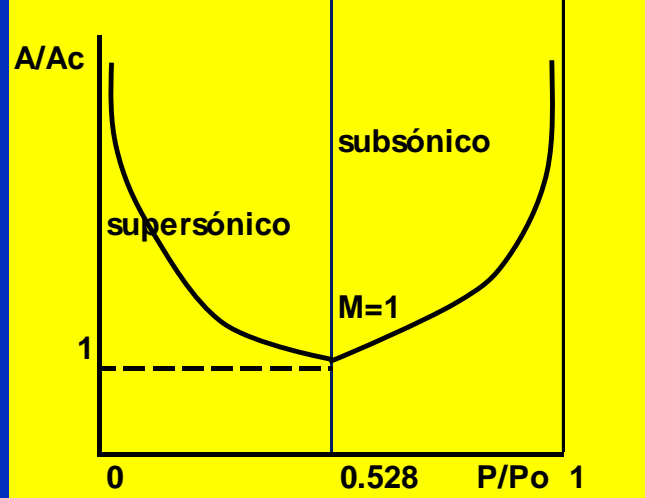
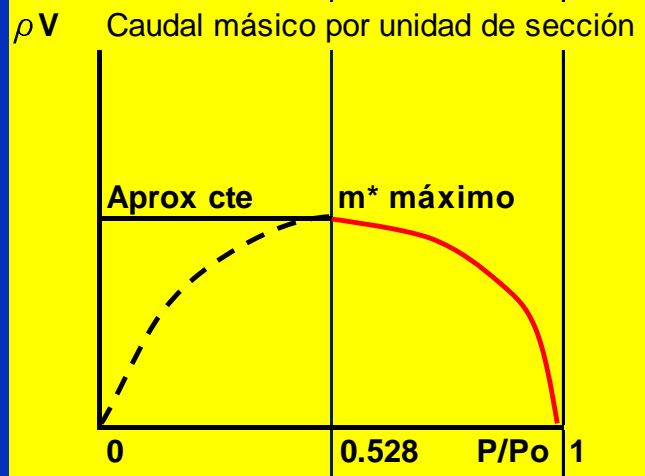
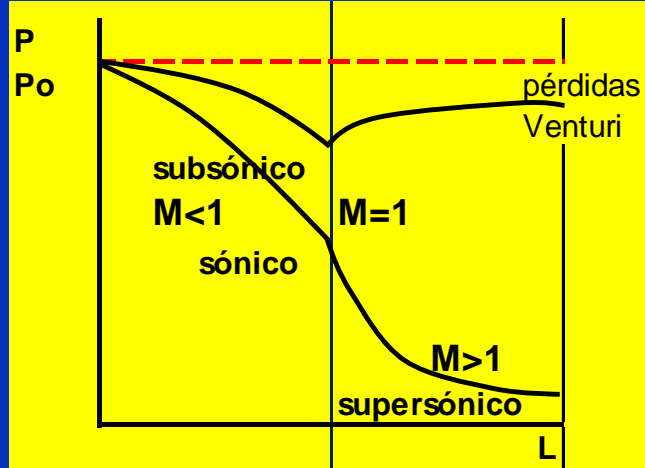
$$C_g = (k * R_{part} * T_g \text{ abs})^{1/2}$$

velocidad del sonido en la garganta

$$C_g = 310,662 \text{ m/s}$$

$$V_g = M * C_g = 310,662 \text{ m/s}$$

Aumenta la velocidad



$$\rho_g = \rho_o (1/((1+((k-1)/2)*M^2))^{1/(k-1)})$$

1,069978845

0,934597917

$$1/(k-1) = 2,494$$

$$\rho_g = 1,039 \text{ Kg masa/m}^3$$

$$\rho_g = \rho_o (1/((1+((k-1)/2)*M^2))^{1/(k-1)})$$

1,201

0,833

0,634

$$\rho_g = 0,780 \text{ Kg/m}^3$$

Disminuye la densidad

Caudal másico :

$$G_m = \rho_g * A_g * V_g$$

$$G_m = 0,0202 \text{ Kg/s}$$

Caudal másico:

$$G_m = \rho_g * A_g * V_g$$

$$G_m = 0,0242 \text{ Kg/s}$$

Aumenta el caudal másico al máximo

Aire proveniente de la atmósfera normal entra subsónicamente y fluye isoentrópicamente a través de un conducto convergente divergente estrangulado cuya área de sección transversal circular, A , varía con la distancia axial a la garganta según $A = 0.1+x^2$; donde: A está en m^2 y x en m . El ducto se extiende desde $x = -0.5 m$ hasta $x = 0.5 m$. Para esta situación de flujo, trazar la vista lateral del ducto y graficar la variación del número de M , la razón de la temperatura a la temperatura de estancamiento T/T_0 , y la razón de la presión estática a la presión de estancamiento p/p_0 , a través del ducto, desde $x = -0.5 m$ hasta $x = 0.5 m$.

$$A = \pi r^2$$

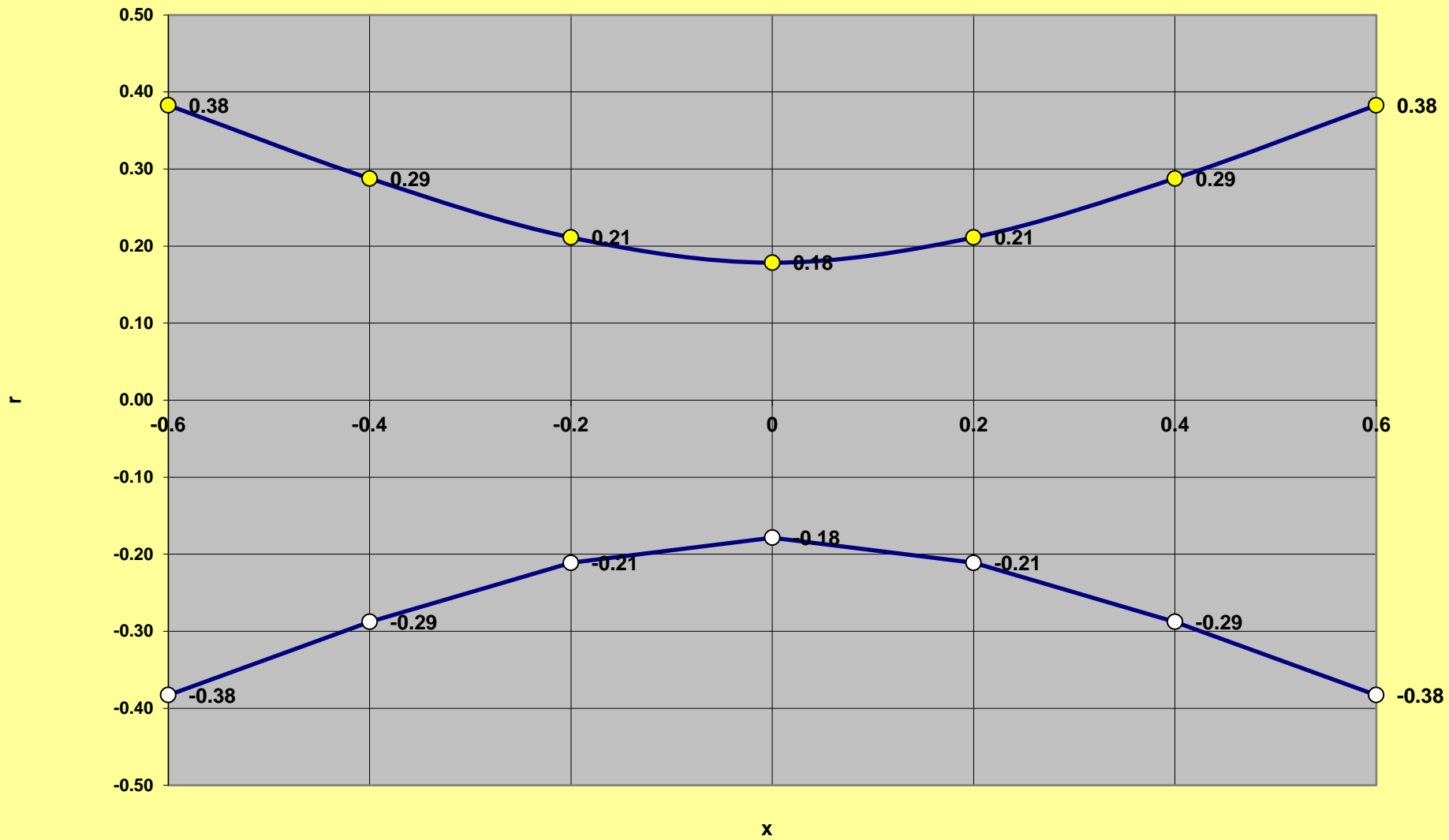
$$T_0 = 288,15 \text{ } ^\circ\text{K}$$

$$\rho_0 = 1,23 \text{ Kg/m}^3$$

$$P_0 = 1 \text{ atm}$$

$$r(x) = (A(x)/\pi)^{1/2}$$

Vista lateral del ducto:			0,1	3,14
x	r	A		
-0,6	0,38	0,46	-	0,38
-0,4	0,29	0,26	-	0,29
-0,2	0,21	0,14	-	0,21
0	0,18	0,1	-	0,18
0,2	0,21	0,14	-	0,21
0,4	0,29	0,26	-	0,29
0,6	0,38	0,46	-	0,38



En un conducto convergente-divergente donde el flujo se haya estrangulado (pgarganta=pcrítica), el área de la garganta es donde se dan las condiciones críticas, además, por condición de flujo constante a lo largo del conducto, se cumple:

$$\rho \cdot A \cdot V = \rho_g \cdot A_g \cdot V_g$$

$$A_g = A(o) \text{ m}^2$$

$$\rho_c = \rho_o \left(\frac{1}{\left(1 + \left(\frac{k-1}{2}\right) M^2\right)} \right)^{1/(k-1)} \quad M^2 = 1$$

$$\rho_c = \rho_o \left(\frac{1}{\left(1 + \left(\frac{k-1}{2}\right)\right)} \right)^{1/(k-1)} \quad \text{valor crítico de la densidad}$$

1,201

0,832986256

2,493765586

$$\rho_c = \rho_g = \quad 0,78 \quad \text{Kg/m}^3$$

$$T_g = T_o / (1 + ((k-1)/2) * M^2) \quad M = 1$$

1,2005

$$T_g = T_c = 240,025 \text{ } ^\circ\text{K}$$

$$C_g = (k * R_{part} * T_g \text{ abs})^{1/2}$$

$$V_g = C_g = 310,662 \text{ m/s}$$

$$G_m = \rho_g * A_g * V_g$$

$$G_m = 24,226 \text{ Kg/s}$$

Se cumple que:

$$A / A_c = (\rho_c / \rho) * (C / V)$$

con lo que dada la relación entre áreas se puede tener el valor del M para una evolución isoentrópica a lo largo del conducto.

$$A/A_c = 1/M * \{1 + ((k-1)/2) * M^2\}^{k+1} / 2(k-1)$$

Se tendrá M en función del área que a su vez está en función de x. Por facilidad en el cálculo conviene tomar valores discretos de x (ej: -0.5;-0.4;.....; 0.6) y luego sus correspondientes áreas en el conducto. Se puede resolver numéricamente la ecuación anterior

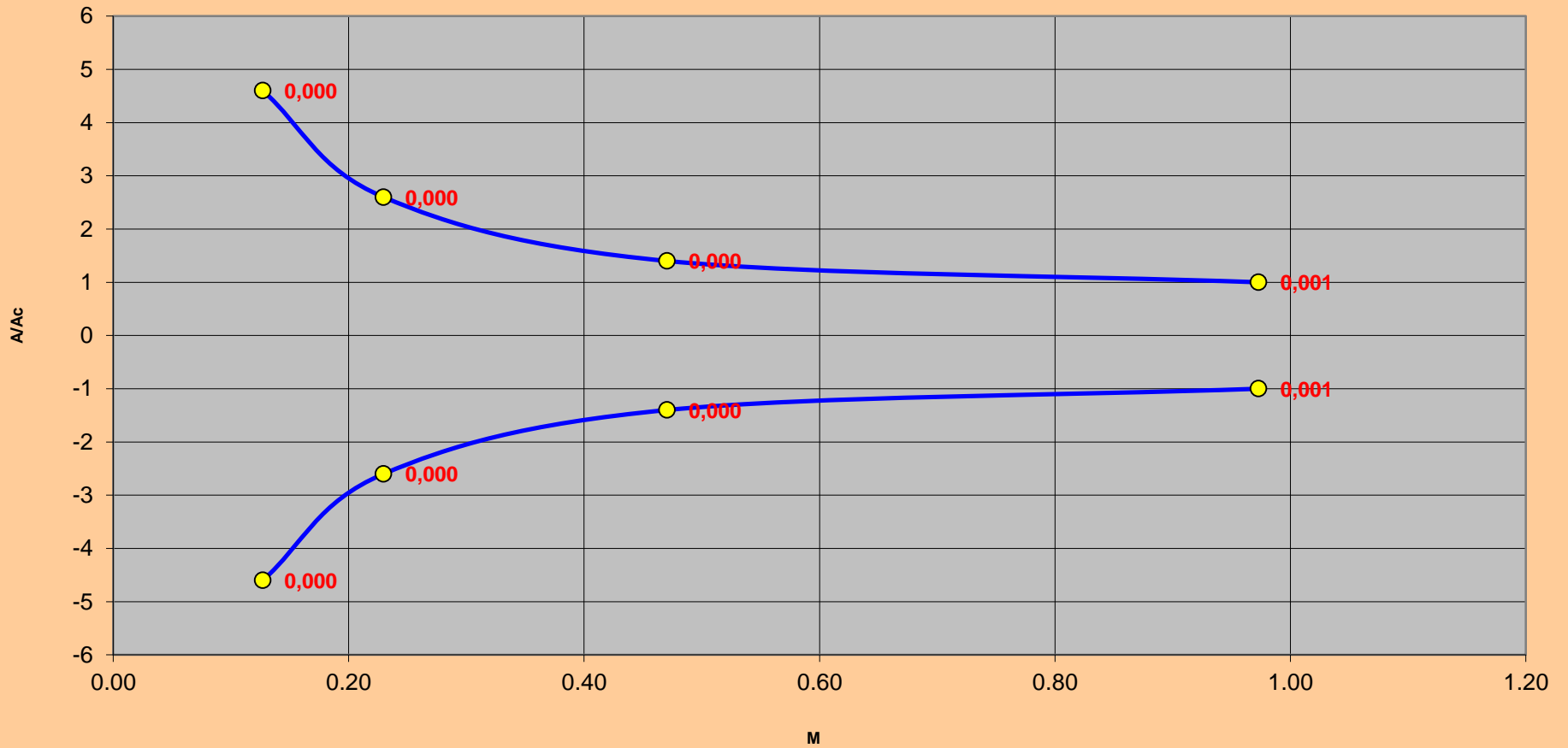
se propone una solución menor que 1 ya que en el conducto convergente no hay flujo supersónico.

Ej:

A/Ac	M
4,600	0,127
2,600	0,230
1,400	0,470
1,000	0,973
1,400	0,471
2,600	0,230
4,600	0,127

x	A1 = A(x)	Ag = A(0)	A/Ac	1/M	$((k-1)/2)*M^2$	$1+(k-1)/2*M^2$	$(1+(k-1)/2)$	$(k+1)/(2(k-1))$	A/Ac
-0,6	0,46	0,1	4,60	7,9	0,0032	1,00323	1,201	2,994	4,6000
-0,4	0,26	0,1	2,60	4,4	0,0106	1,01057	1,201	2,994	2,6003
-0,2	0,14	0,1	1,40	2,1	0,0444	1,04438	1,201	2,994	1,4007
0	0,1	0,1	1,00	1,028	0,1898	1,18980	1,201	2,994	1,0006
0,2	0,14	0,1	1,40	2,1	0,0444	1,04441	1,201	2,994	1,4003
0,4	0,26	0,1	2,60	4,4	0,0106	1,01057	1,201	2,994	2,6002
0,6	0,46	0,1	4,60	7,9	0,0032	1,00323	1,201	2,994	4,6004

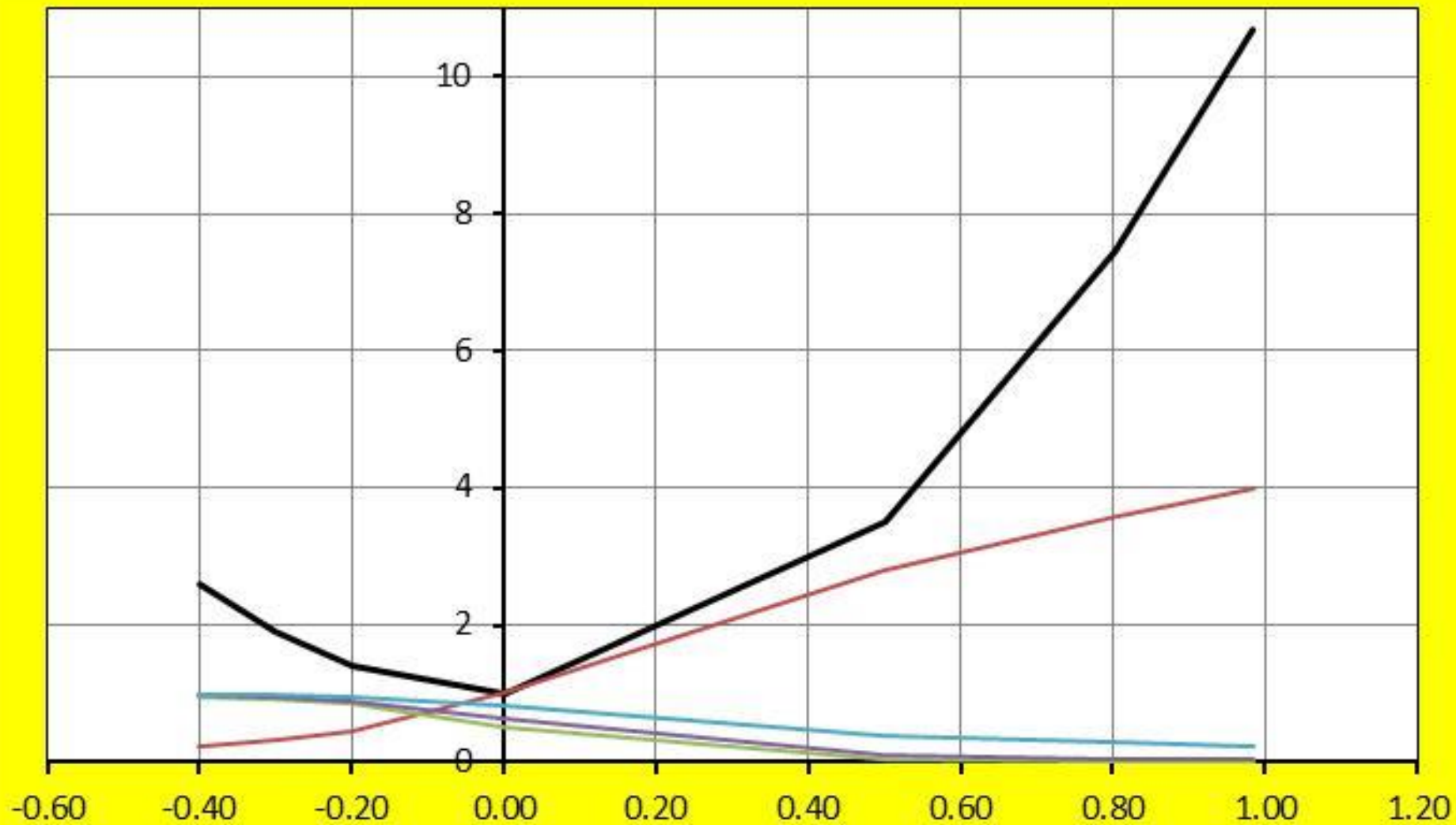
A/Ac	M
4,600	0,127
2,600	0,230
1,400	0,470
1,000	0,973
- 1,000	0,973
- 1,400	0,470
- 2,600	0,230
- 4,600	0,127



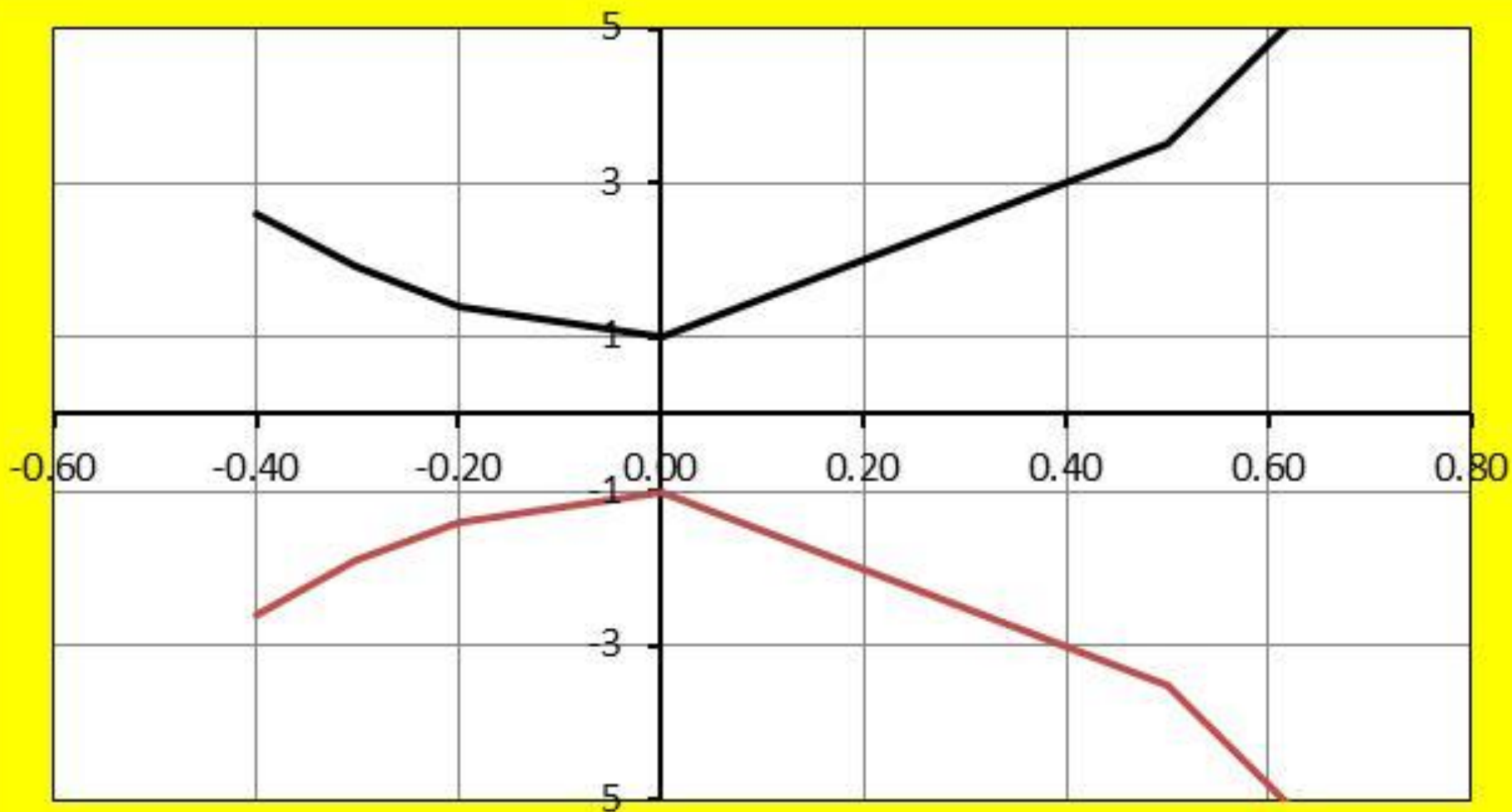
Qué ocurre para secciones por encima de la crítica? Pueden suceder dos soluciones. Una es que el flujo sea subsónico en el conducto divergente. El valor de la presión será mayor que la presión en la garganta y como consecuencia el flujo se desacelerará resultando simétrico respecto a la parte convergente. Otra solución es que el flujo sea supersónico y continúe acelerándose en el conducto.

Se proponen soluciones para Mach mayor que 1:

x	A/Ac	M	A/A*	P/P0	r/r0	T/T0
- 0.40	2.60	0.230	2.600	0.965	0.973	0.9895
- 0.30	1.90	0.321	1.900	0.931	0.950	0.979
- 0.20	1.40	0.463	1.400	0.863	0.900	0.958
0	1.00	1.000	1.000	0.528	0.632	0.833
0.50	3.50	2.800	3.500	0.037	0.095	0.389
0.80	7.45	3.600	7.448	0.011	0.041	0.278
0.99	10.70	4.000	10.702	0.007	0.028	0.238



— A/A_c — M — P/P_0 — r/r_0 — T/T_0



— A/Ac Vs. X — A/Ac

Table B.1
Isentropic Flow
of a Perfect
Gas, $k = 1.4$

Ma	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	A/A^*	Ma	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	A/A^*
0.0	1.0	1.0	1.0	∞	0.74	0.6951	0.7712	0.9013	1.0681
0.02	0.9997	0.9998	0.9999	28.9421	0.76	0.6821	0.7609	0.8964	1.0570
0.04	0.9989	0.9992	0.9997	14.4815	0.78	0.6690	0.7505	0.8915	1.0471
0.06	0.9975	0.9982	0.9993	9.6659	0.8	0.6560	0.7400	0.8865	1.0382
0.08	0.9955	0.9968	0.9987	7.2616	0.82	0.6430	0.7295	0.8815	1.0305
0.1	0.9930	0.9950	0.9980	5.8218	0.84	0.6300	0.7189	0.8763	1.0237
0.12	0.9900	0.9928	0.9971	4.8643	0.86	0.6170	0.7083	0.8711	1.0179
0.14	0.9864	0.9903	0.9961	4.1824	0.88	0.6041	0.6977	0.8659	1.0129
0.16	0.9823	0.9873	0.9949	3.6727	0.9	0.5913	0.6870	0.8606	1.0089
0.18	0.9776	0.9840	0.9936	3.2779	0.92	0.5785	0.6764	0.8552	1.0056
0.2	0.9725	0.9803	0.9921	2.9635	0.94	0.5658	0.6658	0.8498	1.0031
0.22	0.9668	0.9762	0.9904	2.7076	0.96	0.5532	0.6551	0.8444	1.0014
0.24	0.9607	0.9718	0.9886	2.4956	0.98	0.5407	0.6445	0.8389	1.0003
0.26	0.9541	0.9670	0.9867	2.3173	1.0	0.5283	0.6339	0.8333	1.0000
0.28	0.9470	0.9619	0.9846	2.1656	1.02	0.5160	0.6234	0.8278	1.0003
0.3	0.9395	0.9564	0.9823	2.0351	1.04	0.5039	0.6129	0.8222	1.0013
0.32	0.9315	0.9506	0.9799	1.9219	1.06	0.4919	0.6024	0.8165	1.0029
0.34	0.9231	0.9445	0.9774	1.8229	1.08	0.4800	0.5920	0.8108	1.0051
0.36	0.9143	0.9380	0.9747	1.7358	1.1	0.4684	0.5817	0.8052	1.0079
0.38	0.9052	0.9313	0.9719	1.6587	1.12	0.4568	0.5714	0.7994	1.0113
0.4	0.8956	0.9243	0.9690	1.5901	1.14	0.4455	0.5612	0.7937	1.0153
0.42	0.8857	0.9170	0.9659	1.5289	1.16	0.4343	0.5511	0.7879	1.0198
0.44	0.8755	0.9094	0.9627	1.4740	1.18	0.4232	0.5411	0.7822	1.0248
0.46	0.8650	0.9016	0.9594	1.4246	1.2	0.4124	0.5311	0.7764	1.0304
0.48	0.8541	0.8935	0.9559	1.3801	1.22	0.4017	0.5213	0.7706	1.0366
0.5	0.8430	0.8852	0.9524	1.3398	1.24	0.3912	0.5115	0.7648	1.0432
0.52	0.8317	0.8766	0.9487	1.3034	1.26	0.3809	0.5019	0.7590	1.0504
0.54	0.8201	0.8679	0.9449	1.2703	1.28	0.3708	0.4923	0.7532	1.0581
0.56	0.8082	0.8589	0.9410	1.2403	1.3	0.3609	0.4829	0.7474	1.0663
0.58	0.7962	0.8498	0.9370	1.2130	1.32	0.3512	0.4736	0.7416	1.0750
0.6	0.7840	0.8405	0.9328	1.1882	1.34	0.3417	0.4644	0.7358	1.0842
0.62	0.7716	0.8310	0.9286	1.1656	1.36	0.3323	0.4553	0.7300	1.0940
0.64	0.7591	0.8213	0.9243	1.1451	1.38	0.3232	0.4463	0.7242	1.1042
0.66	0.7465	0.8115	0.9199	1.1265	1.4	0.3142	0.4374	0.7184	1.1149
0.68	0.7338	0.8016	0.9153	1.1097	1.42	0.3055	0.4287	0.7126	1.1262
0.7	0.7209	0.7916	0.9107	1.0944	1.44	0.2969	0.4201	0.7069	1.1379
0.72	0.7080	0.7814	0.9061	1.0806	1.46	0.2886	0.4116	0.7011	1.1501

SHAMES



Dryden Flight Research Center EC95-43273-4 Photographed 1995
F-15 Advanced Control Technology for Intergrated Vehicles
(ACTIVE) showing thrust-vectoring nozzles. NASA photo

Fig. 2.8 Toberas del F-15 Active



F14.mpg

ic Flow
ect
1.4

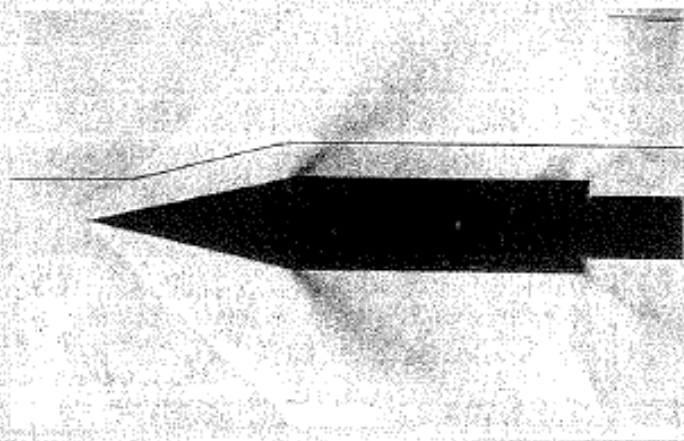
Ma	ρ/ρ_0	ρ/ρ_0	T/T_0	A/A^*	Ma	ρ/ρ_0	ρ/ρ_0	T/T_0	A/A^*
0.0	1.0	1.0	1.0	∞	0.74	0.6951	0.7712	0.9013	1.0681
0.02	0.9997	0.9998	0.9999	28.9421	0.76	0.6821	0.7609	0.8964	1.0570
0.04	0.9989	0.9992	0.9997	14.4815	0.78	0.6690	0.7505	0.8915	1.0471
0.06	0.9975	0.9982	0.9993	9.6659	0.8	0.6560	0.7400	0.8865	1.0382
0.08	0.9955	0.9968	0.9987	7.2616	0.82	0.6430	0.7295	0.8815	1.0305
0.1	0.9930	0.9950	0.9980	5.8218	0.84	0.6300	0.7189	0.8763	1.0237
0.12	0.9900	0.9928	0.9971	4.8643	0.86	0.6170	0.7083	0.8711	1.0179
0.14	0.9864	0.9903	0.9961	4.1824	0.88	0.6041	0.6977	0.8659	1.0129
0.16	0.9823	0.9873	0.9949	3.6727	0.9	0.5913	0.6870	0.8606	1.0089
0.18	0.9776	0.9840	0.9936	3.2779	0.92	0.5785	0.6764	0.8552	1.0056
0.2	0.9725	0.9803	0.9921	2.9635	0.94	0.5658	0.6658	0.8498	1.0031
0.22	0.9668	0.9762	0.9904	2.7076	0.96	0.5532	0.6551	0.8444	1.0014
0.24	0.9607	0.9718	0.9886	2.4956	0.98	0.5407	0.6445	0.8389	1.0003
0.26	0.9541	0.9670	0.9867	2.3173	1.0	0.5283	0.6339	0.8333	1.0000
0.28	0.9470	0.9619	0.9846	2.1656	1.02	0.5160	0.6234	0.8278	1.0000
0.3	0.9395	0.9564	0.9823	2.0351	1.04	0.5039	0.6129	0.8222	1.0013
0.32	0.9315	0.9506	0.9799	1.9219	1.06	0.4919	0.6024	0.8165	1.0029
0.34	0.9231	0.9445	0.9774	1.8229	1.08	0.4800	0.5920	0.8108	1.0051
0.36	0.9143	0.9380	0.9747	1.7358	1.1	0.4684	0.5817	0.8052	1.0079
0.38	0.9052	0.9313	0.9719	1.6587	1.12	0.4568	0.5714	0.7994	1.0113
0.4	0.8956	0.9243	0.9690	1.5901	1.14	0.4455	0.5612	0.7937	1.0153
0.42	0.8857	0.9170	0.9659	1.5289	1.16	0.4343	0.5511	0.7879	1.0198
0.44	0.8755	0.9094	0.9627	1.4740	1.18	0.4232	0.5411	0.7822	1.0248
0.46	0.8650	0.9016	0.9594	1.4246	1.2	0.4124	0.5311	0.7764	1.0304
0.48	0.8541	0.8935	0.9559	1.3801	1.22	0.4017	0.5213	0.7706	1.0366
0.5	0.8430	0.8852	0.9524	1.3398	1.24	0.3912	0.5115	0.7648	1.0432
0.52	0.8317	0.8766	0.9487	1.3034	1.26	0.3809	0.5019	0.7590	1.0504
0.54	0.8201	0.8679	0.9449	1.2703	1.28	0.3708	0.4923	0.7532	1.0581
0.56	0.8082	0.8589	0.9410	1.2403	1.3	0.3609	0.4829	0.7474	1.0663
0.58	0.7962	0.8498	0.9370	1.2130	1.32	0.3512	0.4736	0.7416	1.0750
0.6	0.7840	0.8405	0.9328	1.1882	1.34	0.3417	0.4644	0.7358	1.0842
0.62	0.7716	0.8310	0.9286	1.1656	1.36	0.3323	0.4553	0.7300	1.0940
0.64	0.7591	0.8213	0.9243	1.1451	1.38	0.3232	0.4463	0.7242	1.1042
0.66	0.7465	0.8115	0.9199	1.1265	1.4	0.3142	0.4374	0.7184	1.1149
0.68	0.7338	0.8016	0.9153	1.1097	1.42	0.3055	0.4287	0.7126	1.1262
0.7	0.7209	0.7916	0.9107	1.0944	1.44	0.2969	0.4201	0.7069	1.1379
0.72	0.7080	0.7814	0.9061	1.0806	1.46	0.2886	0.4116	0.7011	1.1501

Table B.1 (Cont.)
Isentropic Flow of
a Perfect Gas,
 $\gamma = 1.4$

M_0	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	A/A^*	M_0	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	A/A^*
1.45	0.296	0.600	0.694	1.429	2.9	0.070	0.370	0.428	2.794
1.5	0.272	0.595	0.697	1.450	3.0	0.070	0.370	0.429	2.820
1.52	0.266	0.594	0.698	1.469	3.1	0.070	0.370	0.430	2.846
1.54	0.260	0.593	0.699	1.488	3.2	0.070	0.370	0.431	2.872
1.56	0.254	0.592	0.700	1.507	3.3	0.070	0.370	0.432	2.898
1.58	0.248	0.591	0.701	1.526	3.4	0.070	0.370	0.433	2.924
1.6	0.242	0.590	0.702	1.545	3.5	0.070	0.370	0.434	2.950
1.62	0.236	0.589	0.703	1.564	3.6	0.070	0.370	0.435	2.976
1.64	0.230	0.588	0.704	1.583	3.7	0.070	0.370	0.436	3.002
1.66	0.224	0.587	0.705	1.602	3.8	0.070	0.370	0.437	3.028
1.68	0.218	0.586	0.706	1.621	3.9	0.070	0.370	0.438	3.054
1.7	0.212	0.585	0.707	1.640	4.0	0.070	0.370	0.439	3.080
1.72	0.206	0.584	0.708	1.659	4.1	0.070	0.370	0.440	3.106
1.74	0.200	0.583	0.709	1.678	4.2	0.070	0.370	0.441	3.132
1.76	0.194	0.582	0.710	1.697	4.3	0.070	0.370	0.442	3.158
1.78	0.188	0.581	0.711	1.716	4.4	0.070	0.370	0.443	3.184
1.8	0.182	0.580	0.712	1.735	4.5	0.070	0.370	0.444	3.210
1.82	0.176	0.579	0.713	1.754	4.6	0.070	0.370	0.445	3.236
1.84	0.170	0.578	0.714	1.773	4.7	0.070	0.370	0.446	3.262
1.86	0.164	0.577	0.715	1.792	4.8	0.070	0.370	0.447	3.288
1.88	0.158	0.576	0.716	1.811	4.9	0.070	0.370	0.448	3.314
1.9	0.152	0.575	0.717	1.830	5.0	0.070	0.370	0.449	3.340
1.92	0.146	0.574	0.718	1.849	5.1	0.070	0.370	0.450	3.366
1.94	0.140	0.573	0.719	1.868	5.2	0.070	0.370	0.451	3.392
1.96	0.134	0.572	0.720	1.887	5.3	0.070	0.370	0.452	3.418
1.98	0.128	0.571	0.721	1.906	5.4	0.070	0.370	0.453	3.444
2.0	0.122	0.570	0.722	1.925	5.5	0.070	0.370	0.454	3.470
2.02	0.116	0.569	0.723	1.944	5.6	0.070	0.370	0.455	3.496
2.04	0.110	0.568	0.724	1.963	5.7	0.070	0.370	0.456	3.522
2.06	0.104	0.567	0.725	1.982	5.8	0.070	0.370	0.457	3.548
2.08	0.098	0.566	0.726	2.001	5.9	0.070	0.370	0.458	3.574
2.1	0.092	0.565	0.727	2.020	6.0	0.070	0.370	0.459	3.600
2.12	0.086	0.564	0.728	2.039	6.1	0.070	0.370	0.460	3.626
2.14	0.080	0.563	0.729	2.058	6.2	0.070	0.370	0.461	3.652
2.16	0.074	0.562	0.730	2.077	6.3	0.070	0.370	0.462	3.678
2.18	0.068	0.561	0.731	2.096	6.4	0.070	0.370	0.463	3.704
2.2	0.062	0.560	0.732	2.115	6.5	0.070	0.370	0.464	3.730
2.22	0.056	0.559	0.733	2.134	6.6	0.070	0.370	0.465	3.756
2.24	0.050	0.558	0.734	2.153	6.7	0.070	0.370	0.466	3.782
2.26	0.044	0.557	0.735	2.172	6.8	0.070	0.370	0.467	3.808
2.28	0.038	0.556	0.736	2.191	6.9	0.070	0.370	0.468	3.834
2.3	0.032	0.555	0.737	2.210	7.0	0.070	0.370	0.469	3.860
2.32	0.026	0.554	0.738	2.229	7.1	0.070	0.370	0.470	3.886
2.34	0.020	0.553	0.739	2.248	7.2	0.070	0.370	0.471	3.912
2.36	0.014	0.552	0.740	2.267	7.3	0.070	0.370	0.472	3.938
2.38	0.008	0.551	0.741	2.286	7.4	0.070	0.370	0.473	3.964
2.4	0.002	0.550	0.742	2.305	7.5	0.070	0.370	0.474	3.990
2.42	0.000	0.549	0.743	2.324	7.6	0.070	0.370	0.475	4.016
2.44	0.000	0.548	0.744	2.343	7.7	0.070	0.370	0.476	4.042
2.46	0.000	0.547	0.745	2.362	7.8	0.070	0.370	0.477	4.068
2.48	0.000	0.546	0.746	2.381	7.9	0.070	0.370	0.478	4.094
2.5	0.000	0.545	0.747	2.400	8.0	0.070	0.370	0.479	4.120
2.52	0.000	0.544	0.748	2.419	8.1	0.070	0.370	0.480	4.146
2.54	0.000	0.543	0.749	2.438	8.2	0.070	0.370	0.481	4.172
2.56	0.000	0.542	0.750	2.457	8.3	0.070	0.370	0.482	4.198
2.58	0.000	0.541	0.751	2.476	8.4	0.070	0.370	0.483	4.224
2.6	0.000	0.540	0.752	2.495	8.5	0.070	0.370	0.484	4.250
2.62	0.000	0.539	0.753	2.514	8.6	0.070	0.370	0.485	4.276
2.64	0.000	0.538	0.754	2.533	8.7	0.070	0.370	0.486	4.302
2.66	0.000	0.537	0.755	2.552	8.8	0.070	0.370	0.487	4.328
2.68	0.000	0.536	0.756	2.571	8.9	0.070	0.370	0.488	4.354
2.7	0.000	0.535	0.757	2.590	9.0	0.070	0.370	0.489	4.380
2.72	0.000	0.534	0.758	2.609	9.1	0.070	0.370	0.490	4.406
2.74	0.000	0.533	0.759	2.628	9.2	0.070	0.370	0.491	4.432
2.76	0.000	0.532	0.760	2.647	9.3	0.070	0.370	0.492	4.458
2.78	0.000	0.531	0.761	2.666	9.4	0.070	0.370	0.493	4.484
2.8	0.000	0.530	0.762	2.685	9.5	0.070	0.370	0.494	4.510
2.82	0.000	0.529	0.763	2.704	9.6	0.070	0.370	0.495	4.536
2.84	0.000	0.528	0.764	2.723	9.7	0.070	0.370	0.496	4.562
2.86	0.000	0.527	0.765	2.742	9.8	0.070	0.370	0.497	4.588
2.88	0.000	0.526	0.766	2.761	9.9	0.070	0.370	0.498	4.614
2.9	0.000	0.525	0.767	2.780	10.0	0.070	0.370	0.499	4.640

FIGURA 13.9

Fotografía «schlieren» de la onda de presión sobre un cono de ángulo total 30° a $Ma = 1.88$. (Fotografía del Laboratorio Aerodinámico Guggenheim del Instituto de Tecnología de California.)



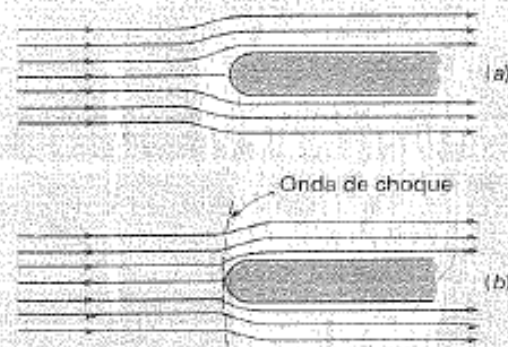
fotografía «schlieren»⁴ del flujo supersónico alrededor de un modelo con punta afilada en un túnel de viento. Podría representar también un proyectil en vuelo a través del aire en reposo. Desde la punta del modelo se extiende hacia atrás una compresión cónica u onda de choque, como puede apreciarse por el fuerte gradiente de densidad representado por una sombra brillante en la fotografía. Una línea de corriente del fluido sin perturbar no se ve afectada por el contorno del cuerpo o por el proyectil hasta que incide sobre la onda de choque, momento en el que cambia bruscamente de dirección, moviéndose aproximadamente en paralelo al contorno de la punta. Cuando la punta cónica se une al cuerpo cilíndrico del modelo, se puede observar sombras oscuras, que representan ondas de refracción. Las líneas de corriente cambian de dirección otra vez al atravesar esta zona, para proseguir paralelas de nuevo al flujo principal. Una línea de corriente típica se ha dibujado sobre la fotografía. En la Figura 13.10 se puede apreciar la diferencia entre la disposición del flujo subsónico y el supersónico.

La razón por la que las líneas de corriente se ven afectadas por delante de un proyectil es que el cuerpo se mueve más deprisa que la perturbación que se transmite hacia delante. Esto se representa en la Figura 13.11. Considere

⁴ El método «schlieren» aprovecha el hecho de que la refracción de la luz es perturbada por un gradiente de presión (densidad). Se pueden encontrar algunos detalles de óptica para visualización de flujos en la Sección 11.6 de Michel Saad, *Compressible Fluid Flow*, 2.^a ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.

FIGURA 13.10

Características del flujo aguas arriba de un cuerpo. a) Flujo subsónico, b) Flujo supersónico.



una fuente puntual de una perturbación infinitesimal que se mueve a velocidad supersónica V a través de un fluido. En el instante en que la fuente pasa por el punto A_0 , la perturbación comienza a transmitirse en todas direcciones con la velocidad c de una onda de sonido en este medio. Consecutivamente, la fuente pasa por los puntos A_1 , A_2 y A_3 , siendo este último el que puede representar la posición de la fuente en el momento de la observación. Mientras la fuente ha cubierto la distancia A_0A_3 con velocidad V , la onda de sonido, que se mueve más lentamente a la velocidad c , ha progresado sólo hasta el radio A_0B_0 . Las perturbaciones provenientes de A_1 y A_2 forman una envolvente en línea recta, que es la onda de choque. El ángulo β se denomina *ángulo de Mach*, y se puede observar que

$$\text{sen } \beta = \frac{A_0B_0}{A_0A_3} = \frac{c}{V} = \frac{1}{Ma} \quad (13.53)$$

donde Ma , la relación adimensional de velocidades V/c , es el número de Mach.

Debido a la sección cónica en la parte frontal del mismo en el caso del proyectil finito de la Figura 13.10, la onda de choque en la punta forma un ángulo con la dirección del flujo principal que es mayor que el ángulo de Mach. Sin embargo, se pueden aplicar las correcciones adecuadas⁵ para que el ángulo de la onda de choque en un objeto con la punta afilada sirva para

⁵ Donald A. Gilbrech, *Fluid Mechanics*, pág. 405, Wadsworth Publishing Co., Belmont, California, 1965.

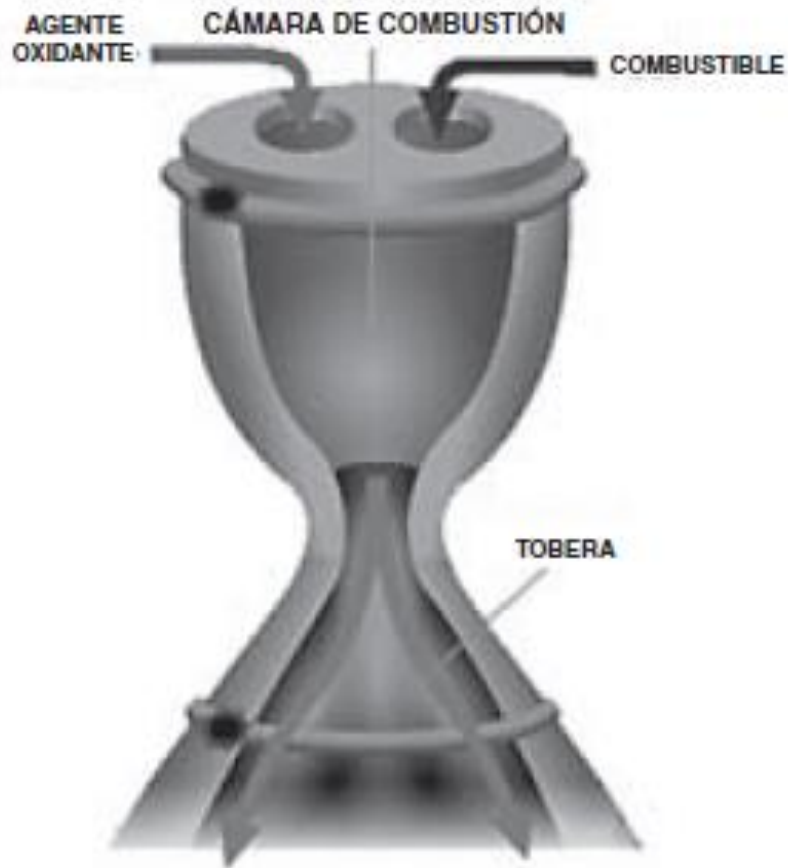


FIGURA 12-26

Las toberas convergente-divergentes son de uso común en cohetes para proporcionar gran fuerza de empuje.

Cortesía de Pratt y Whitney, www.pratt-whitney.com/how.htm. Reproducido con autorización.



FIG. 15-7. Fotografía estroboscópica de una hélice en la cual se está produciendo la cavitación, tomada en el túnel de cavitación del Pardo (véase Figura 15-6).

de que un álabe de una turbina de espesor de 25 mm queda totalmente horadado y erosionado por la cavitación en un solo año.

Antiguamente se creyó que la cavitación no era más que una corrosión química producida por la liberación de aire y de oxígeno disuelto en el líquido a bajas presiones. Actualmente se sabe que la cavitación es debida principalmente a la acción mecánica de impactos rápidos, a manera de explosiones, de las partículas de líquido, aunque no se descarta la posibilidad de acción química corrosiva, cuya naturaleza no se ha llegado aún a dilucidar por completo.

Estos impactos son además periódicos, es decir, se produce un fenómeno vibratorio que aumenta la erosión del material por fatiga. A estas vibraciones hay que referir la explicación del fallo de algunas piezas, por ejemplo, de los pernos de sujeción de los cojinetes de los generadores en las centrales hidroeléctricas cuando se está produciendo la cavitación.

15.2.3. Control de la cavitación

Los principales fabricantes de estructuras y máquinas hidráulicas, por ejemplo de turbinas, poseen en sus laboratorios equipo para estudiar este fenómeno. El estroboscopio presta grandes servicios para el estudio de la cavitación. La Fig. 15-6 representa el túnel de cavitación del Canal de Experiencias Hidrodinámicas de El Pardo, Madrid, y la Fig. 15-7 es una foto tomada en dicho túnel de una hélice en la cual se está produciendo la cavitación.

El control de la cavitación es doble:

— Diseñar contra la cavitación, es decir, diseñar tanto la máquina como la instalación de la misma para que no se produzca este fenómeno.

PROBLEMAS

15-1. Al final de una tubería de acero ($E = 2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$) de diámetro interior $D = 600 \text{ mm}$, y de espesor $\delta = 10 \text{ mm}$, se encuentra una válvula. La velocidad del agua en la tubería es $v = 2,50 \text{ m/s}$. La válvula se cierra instantáneamente.

Calcular:

a) la velocidad de propagación de la onda de presión;

b) la sobrepresión producida por el golpe de ariete.

Módulo de elasticidad de volumen del agua, $E_0 = 2,03 \cdot 10^5 \text{ N/cm}^2$.

En el cierre instantáneo de la válvula la sobrepresión Δp viene dada por la Ec. (15-9), donde la velocidad de propagación de la onda de presión, c , viene dada a su vez por la fórmula de Joukowski (15-11):

$$c = \frac{\sqrt{\frac{E_0}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{E_0 D}{E \delta}}} = \frac{\sqrt{\frac{2,03 \cdot 10^9}{1.000}}}{\sqrt{1 + \frac{2,03 \cdot 10^5 \cdot 0,6}{2 \cdot 10^7 \cdot 0,01}}} = 1.112 \text{ m/s}$$

El numerador podría haberse escrito directamente, poniendo el valor 1.425 para el agua de la Ec. (15-12).

La Ec. (15-13) nos hubiera dado solo un valor aproximado porque esta ecuación supone un valor de E algo distinto.

La sobrepresión será:

$$\Delta p = \rho c v = 1.000 \cdot 1.112 \cdot 2,5 = 2,78 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 278 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

15-2. Una bomba centrífuga aspira agua de un depósito por una tubería de 100 m de longitud y 200 mm de diámetro. El eje de la bomba se encuentra 4 m por encima del nivel del agua en el depósito. La bomba impulsa por una tubería de 100 mm de diámetro y 1.000 m de longitud a otro depósito, cuyo nivel se encuentra 50 m por encima del nivel del depósito de aspiración. El coeficiente λ de pérdidas primarias de las dos tuberías es de 0,025. Todas las pérdidas secundarias (incluso la debida a la entrada del agua en el depósito de impulsión) se han tenido en cuenta en el cómputo de la longitud de la tubería, que ha de interpretarse como longitud equivalente (véase Sec. 11-5). La temperatura del agua es de 10° C y la presión atmosférica 1 bar.

Calcular:

- potencia que la bomba debe comunicar a la corriente para bombear un caudal de 8 l/s;
- máximo caudal que puede bombearse con esta instalación;
- máximo caudal que puede bombearse con la instalación anterior, pero sustituyendo la tubería de aspiración por otra de 100 mm.

BIBLIOTECA

Una válvula esférica ($K=10$) situada en el extremo de una tubería de 500 m de longitud se abre rápidamente. El diámetro de la conducción es de 1 m y el factor de fricción es $f= 0.018$; las pérdidas menores valen $2 \cdot V^2/2g$ y la altura del agua en el depósito es de $H=20$ m.

Cuánto tiempo debe transcurrir para que el caudal alcance el 80 % del valor que corresponde a régimen permanente?

Es el caso de una tubería de descarga de un embalse y una turbina generadora. Hay una válvula, ya que es necesario controlar el caudal hacia la turbina para los distintos picos de demanda energética, cerca de la turbina . Esta válvula sirve para los momentos de arranque y parada. En este caso se verá el caso de arranque.

El nivel del tanque se considera constante(H). Su fluctuación para el tiempo en que ocurre el fenómeno de apertura de la válvula es despreciable.

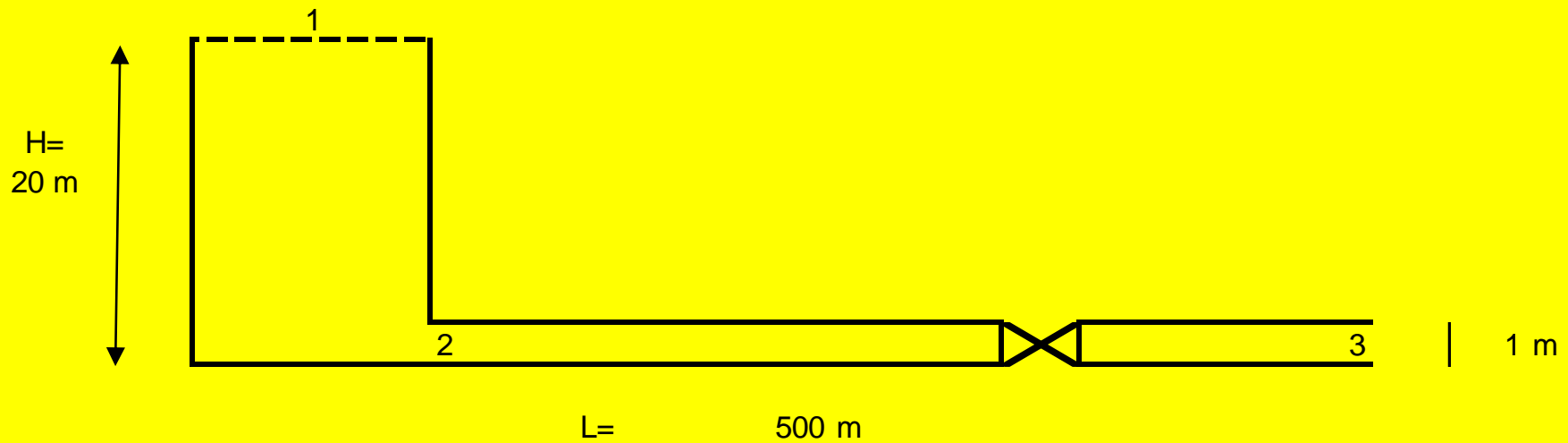
La masa de agua del tanque es inmensa comparada con el sistema de cañerías.

La tubería en el momento de la apertura está totalmente llena.

Por experiencia y estudios se sabe que:

- $K=$ coeficiente de pérdida en la válvula = 10
- $f =$ factor de fricción en la tubería = 0.018
- $H =$ altura del agua en el tanque = 20 m

Se desea saber el tiempo en que el fenómeno alcanza aproximadamente una situación de régimen permanente. Se debe calcular el tiempo en que la velocidad es 0.8 de la velocidad de régimen.



Aplicando Bernoulli entre 2 y 3:

$$P_2/\gamma + Z_2 + V_2^2/2g = P_3/\gamma + Z_3 + V_3^2/2g + h_p \quad \text{siendo } Z_2 = Z_3 \text{ y } V_2 = V_3 \text{ o } \Delta v \text{ aprox } = 0$$

$$P_2/\gamma = P_3/\gamma + h_p$$

$$h_p = (P_2 - P_3) / \gamma$$

$$P_1 = P_3 = P_{atm} \quad P_2 = P_1 + \gamma H$$

$$(P_2 - P_3) / \gamma = (P_1 + \gamma H - P_1)$$

$$h_p = H = 20 \quad \text{m}$$

V3 de régimen cuando se abre la válvula: cañería en serie, el D es el mismo, el Q es igual, pero la caída es distinta.

$$h_p = f \frac{L}{D} \frac{V_3^2}{2g} + K \frac{V_3^2}{2g} + 2 \frac{V_3^2}{2g}$$

Pérdidas menores

$$h_p = \frac{V_3^2}{2g} (f \frac{L}{D} + K + 2)$$

18.7

4.320

Pérdidas en la válvula

$$V_3 = (2 g h_p / (f \frac{L}{D} + k + 2))^{1/2}$$

$$V_3 = 4.32 \text{ m/s vel de régimen} = V_f$$

Pérdidas por fricción

$$\% \text{ de la vel de régimen: } 3.46 \text{ m/s} = v$$

De la segunda ley de Newton

$$\sum F = m a = P_2 A - F_{viscosas} - P_3 A$$

$$P_1 = P_3 = P_{atm}$$

$$P_2 = P_1 + \gamma H$$

$$\text{Sum } F = (P1 + \gamma H) A - \gamma \text{ hp } A - P1A$$

$$\text{Sum } F = P1A + \gamma A H - \gamma \text{ hp } A - P1A = \rho \text{ Vol } dv/dt \quad v = \text{velocidad instantánea}$$

$$\gamma A [H - v^2/2g (f L/D + K + 2)] = \gamma/g A L dv/dt$$

$$dt = L/g dv / [H - v^2/2g (f L/D + k + 2)] \quad V_3^2/V_3^2 = L/g V_3^2 dv / [V_3^2 H - v^2 V_3^2/2g (f L/D + k + 2)]$$

$$\text{hp} = V_3^2/2g (f L/D + K + 2) = H$$

$$dt = L/g V_3^2 dv / [V_3^2 H - v^2 H]$$

$$dt = L/g V_3^2/H dv / [V_3^2 - v^2]$$

En el tiempo t se alcanza el 80% de la velocidad de régimen

$$\int_0^t dt = L/g V_3^2/H \int_0^{V_f=0.8 V_3} dv / [V_3^2 - v^2]$$

$$t = \frac{500/2 \cdot 9.8 \cdot 20 \cdot 4.32}{5.51} \ln \frac{(V_f+v)}{(V_f-v)}$$

$$(4.32 + 0.8 \cdot 4.32 / 4.32 - 0.8 \cdot 4.32) =$$

$$\ln(9.0465) =$$

$$t = 12.14 \text{ segundos}$$

1.276
pag155 giles

9.0465
2.2024

Integral:

Si $V/V_f = \Phi$

$$\int_0^{V_f} \frac{V_f}{0} \frac{V_f^2/(V_f^2-v^2)}{dv} = d\Phi/(1-\Phi^2) = 1/2 \ln (1+\Phi/1-\Phi)$$

a) Determinar el máximo tiempo para un cierre rápido de una válvula colocada en una conducción de las siguientes características:

- L= 1000 m
- D= 0,120 m
- Espesor, e=12 mm
- Velocidad de régimen permanente, Vo= 3m/s

La tubería es de acero y el fluido considerado es agua.

b) Calcular el máximo de presión que se produce debido a este cierre.

c) Determinar la longitud de tubería afectada por la sobrepresión, si el cierre se realiza en 1 segundo.

Considerar: $E_{\text{agua}}=21000 \text{ Kg/cm}^2$

Cierre rápido:	$T_c \leq 2L/C$	210,000,000	
Tc máx:	$T_c = 2L/C$		
		$E_v/E =$	0.001
C=	1,428 m/s	$E_v/r =$	2,059,429
		$D/e =$	10
			1.01
$T_{c\text{máx}} =$	1.40 seg		

Todo cierre que se produzca en un tiempo mayor que 1.4 segundos tendrá menos requerimientos para el diseño y construcción.

$C_{\text{máx}} = (E_v/\rho)^{1/2} =$	1,435 m/s	V=	3 m/s
Cierre rápido:	$DH = C V /g$	439 m c a	$\Delta P = 43.9 \text{ Kg/cm}^2$
$T_c C / 2 =$	718 m	$T_c =$	1 segundo
L- $T_c C / 2 =$	282 m	L =	1000 m

Son 282 m a partir de la válvula sometidos a sobrepresión y el resto (718m) hasta el estanque disminuye la presión

Cierre lento:

$$\Delta H = V/g \frac{2L}{T_c}$$

Tubería de acero

diámetro D = 120 cm

espesor e = 0.95 cm

longitud L = 3000 m

velocidad V = 1.8 m /seg

tiempo cierre Tc = 2.5 seg

dens. agua ρ = 102.04 UTM/m³



Sobrepresión=?

Tensión=?

Tc >= 2L/C

cierre lento

Tc < 2L/C

cierre rápido

Valor de la celeridad de la onda:

$$C = (E_v / \rho [1 + E_v/E_t * D/e])^{1/2}$$

Et= 2,100,000 Kg/cm²

módulo de Young acero (E).

Ev = 22,000 Kg/cm²

módulo de elasticidad volumétrico del agua (k).

$$C = (22000 \cdot 10^4 \text{ Kg/m}^2 / 102 \text{ Kg/m}^3 / \text{m/s}^2 * [1 + 22000/2100000 * 120/0.95]^{1/2}$$

$$C = \overset{928,358}{964} \text{ m/seg}$$

1000 Kg/m³

9.8 m/s²

$$\rho = \gamma / g$$

$$\rho = 102.04 \text{ kgf/m}^3 \text{ s}^2/\text{m}$$

$$\rho = 102.04 \text{ UTM/m}^3$$

Tiempo de cierre :

$$T_c < 2 L/C = 6.23 \text{ seg}$$

$$2.5 \text{ seg} < 6.23 \text{ seg}$$

Sobrepresión cierre rápido:

$$\Delta P = \rho C V$$

$$\Delta P = 176,970 \text{ Kg/m}^2$$

$$\Delta P = 17.70 \text{ Kg/cm}^2$$

Considerando una tubería sometida a presión interior :

T (tensión/longitud) = Presión * radio

si el espesor de la tubería es t, la tensión unitaria es:

$$\sigma = P r / t$$

$$\sigma = 1,118 \text{ Kg/cm}^2$$

	Psi	Grado A	Grado B
Esfuerzo de fluencia	mín	30000	35000
Esfuerzo de tensión	mín	48000	60000

$$\sigma_{\text{real}} = 1200 + 1118 = 2,318 \text{ Kg/cm}^2$$

Si la tensión de diseño es 1200 Kg/cm² y le sumo la sobretensión, está cerca del límite de la zona elástica (E).