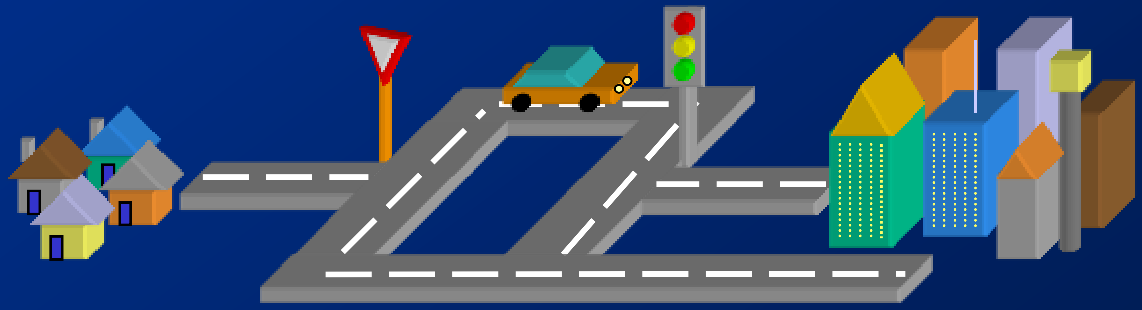
MODELOS DE ASIGNACIÓN A TRANSPORTE PRIVADO




Generación y Atracción
Distribución
Partición Modal
Asignación

ASIGNACIÓN

CONTENIDO PRESENTACÍÓN

- Concepto de Asignación.
- Equilibrio Óptimo de Usuarios.
- Equilibrio Óptimo del Sistema.
- Calibración Parámetros de Asignación.

ASIGNACIÓN

Una vez definidos los viajes O-D dentro del sistema analizado para un determinado período (**Distribución**) y los modos utilizados (**Partición Modal**), la etapa de **Asignación** determina las rutas empleadas en la realización de sus viajes.

Se consideran dos grupos de modelos de Asignación:

- Asignación Transporte Privado (vehículos sobre una red vial)
- Asignación Transporte Público (pasajeros sobre una red de servicios)

ASIGNACIÓN TRANSPORTE PRIVADO

Se consideran básicamente dos enfoques:

- **Sin Congestión**:
  - Asignación a Rutas Mínimas
  - Asignación Estocástica
- **Con Congestión**:
  - Asignación de Equilibrio Determinístico (Implementado en ESTRAUS)
  - Asignación de Equilibrio Estocástico

Equilibrio en Redes

Objetivos: **Estimar el patrón de flujos o equilibrio de corto plazo con *A* y *T* constantes.**

Método: **Predecir el comportamiento de usuarios en elección de ruta.**

Supuesto: **Decisiones racionales.**

Minimizar costos individuales.

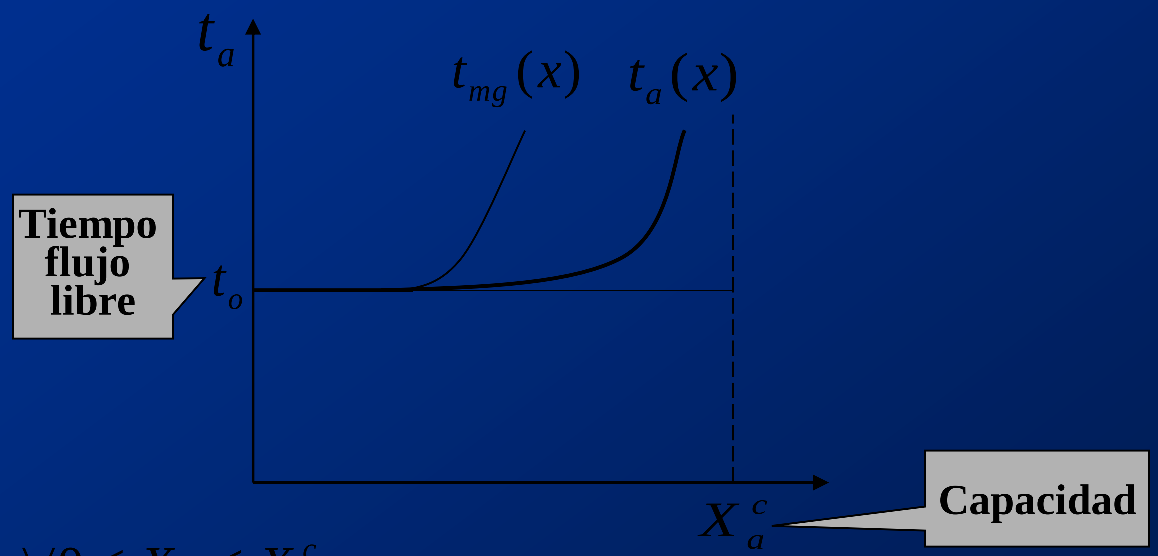
Información sobre alternativas y costos de viaje por experiencias repetidas.

Fenómeno de Congestión

Costo generalizado de Transporte:

Tiempo de viaje (*OD*) + Tarifa

Tiempo de viaje: depende del flujo (congestión)



$$\frac{\partial t_a}{\partial X_a} \geq 0 \quad \forall 0 \leq X_a \leq X_a^c$$

$$t_{mg}(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x \cdot t_a(x)\right) = t_a(x) + X\,\frac{\partial t_a}{\partial x} > t_a(x)$$

Tiempo Total T **Congestión >0** **Tiempo Medio**

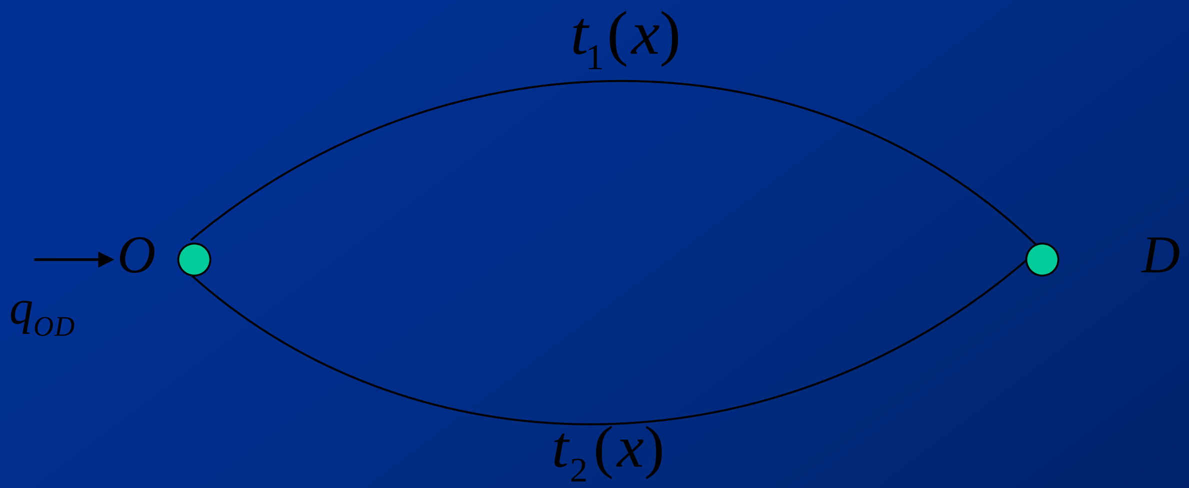
Equilibrio del Usuario

Definición: El usuario está en equilibrio cuando todas las rutas alternativas tienen un mayor costo generalizado (tiempo de viaje).

Equilibrio de Wardrop (1952)

El equilibrio de una red en múltiples rutas es aquella situación en que ningún usuario puede disminuir su propio tiempo de viaje a través de un cambio unilateral de ruta.

Equilibrio de Wardrop



Situaciones posibles en equilibrio

i) $t_1 = t_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$

$$x_1 + x_2 = q_{OD}$$

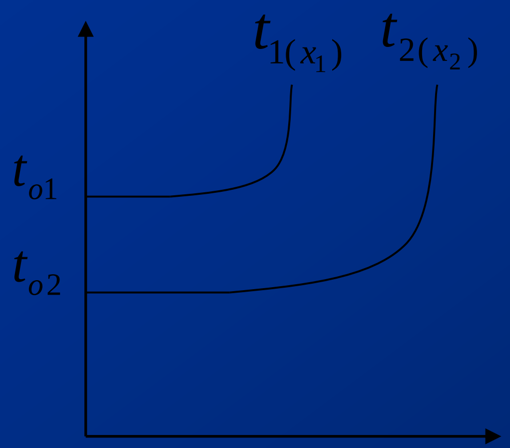
ii) $t_1 > t_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad x_2 = q_{OD}$

iii) $t_1 < t_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = q_{OD} \quad x_2 = 0$

En el equilibrio las rutas ocupadas tienen igual tiempo de viaje, las demás tienen un tiempo de viaje mayor.

Equilibrio Usuario: Solución Gráfica

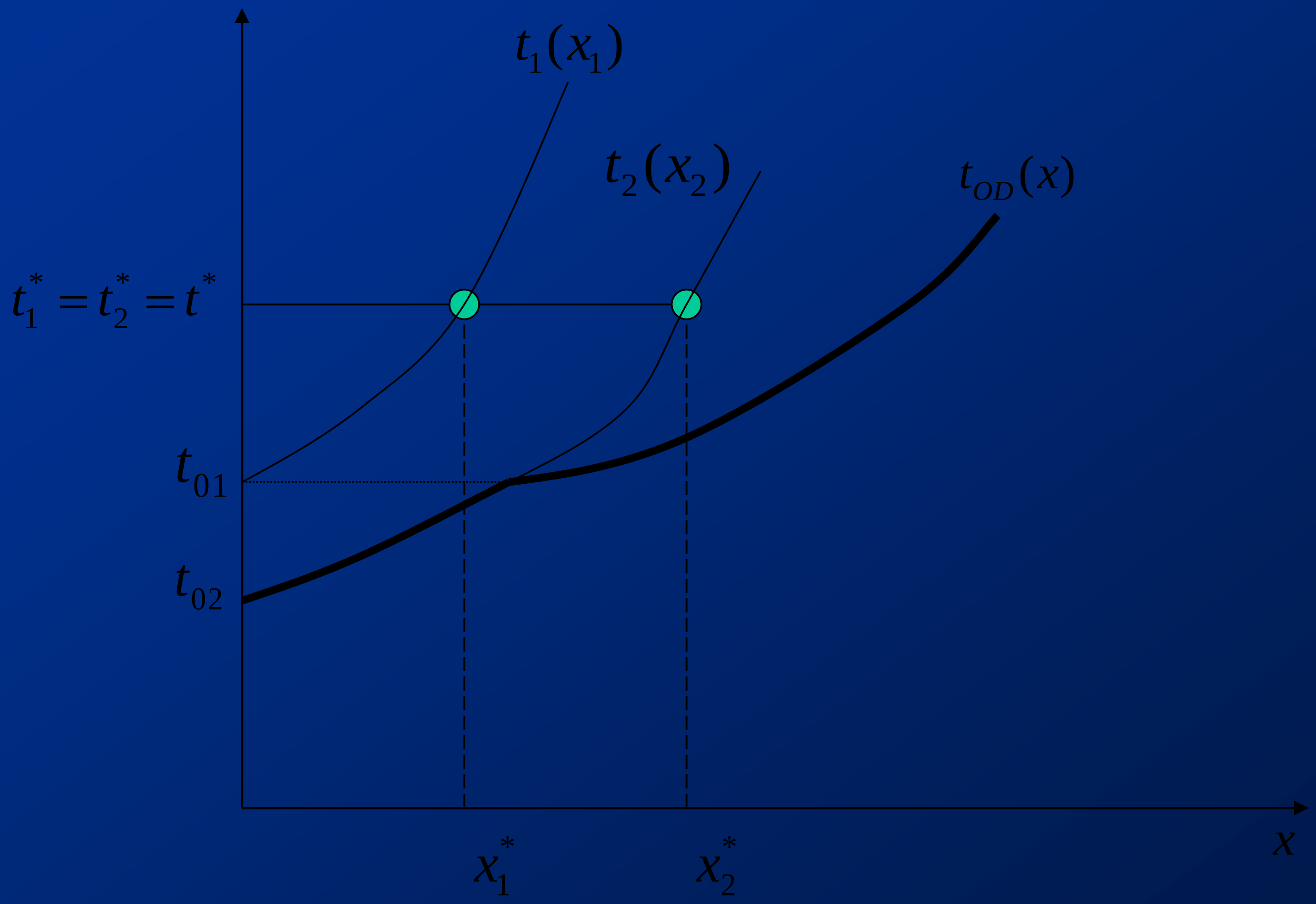
Caso: Un par *OD* y dos rutas



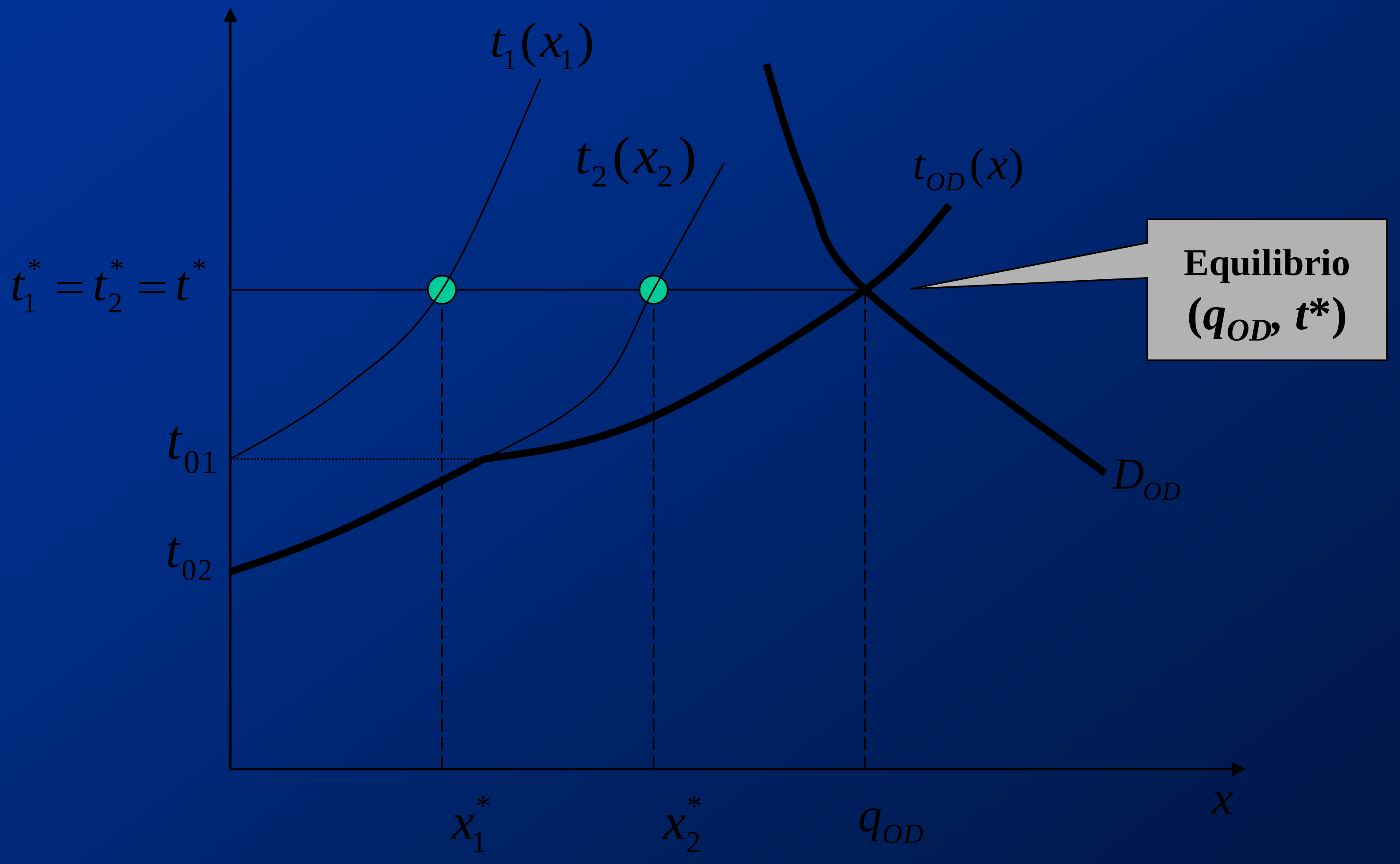
Ruta 1: Alto tiempo de viaje a flujo libre y tiempo de viaje muy sensible al flujo (Una Cuesta).

Ruta 2: Menor tiempo de viaje a flujo libre y tiempos de viaje menos sensible al flujo (Un Tunel).

Ejemplos: Caminos ripio/pavimentos, una/dos pistas, horizontal/pendiente, recta/curva.



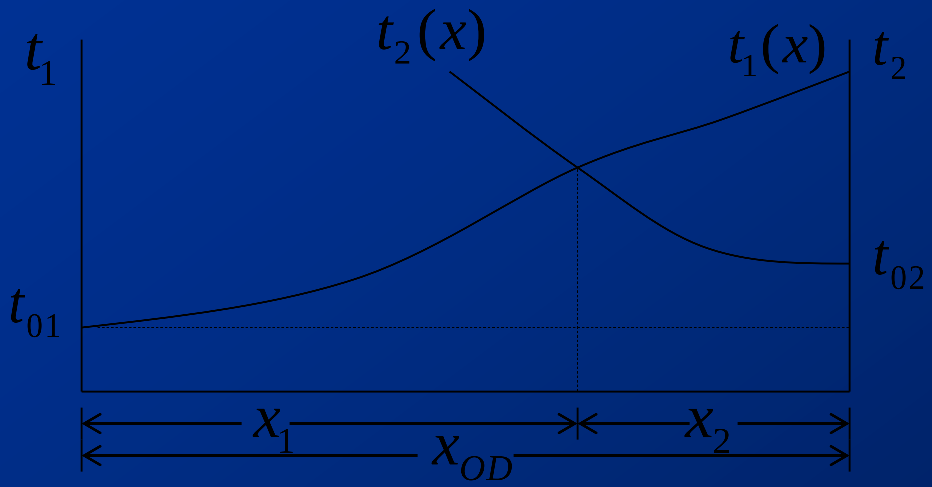
$t_1(x_1)$
$t_2(x_2)$
$t_{OD}(x)$
$t_1^* = t_2^* = t^*$
t_{01}
t_{02}
x_1^*
x_2^*
x

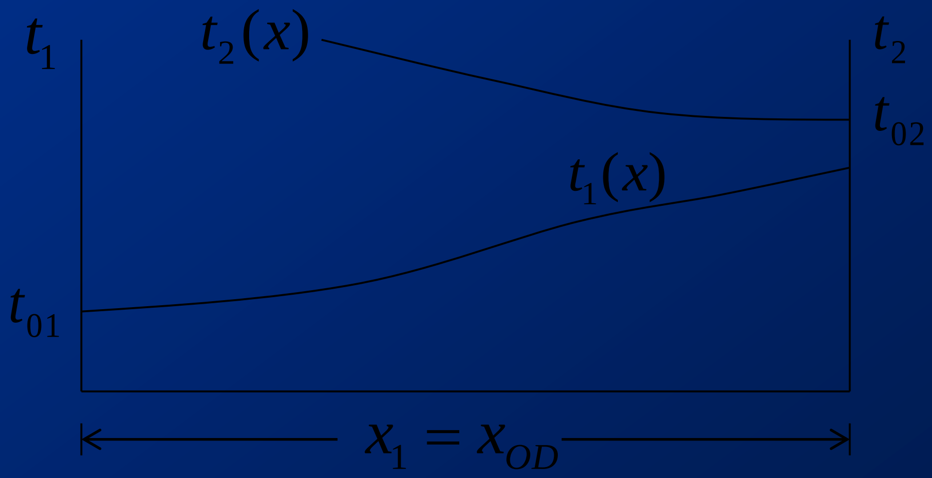


$t_1(x_1)$
$t_2(x_2)$
$t_{OD}(x)$
$t_1^* = t_2^* = t^*$
t_{01}
t_{02}
Equilibrio
(q_{OD}, t^*)
D_{OD}
x_1^*
x_2^*
q_{OD}
x

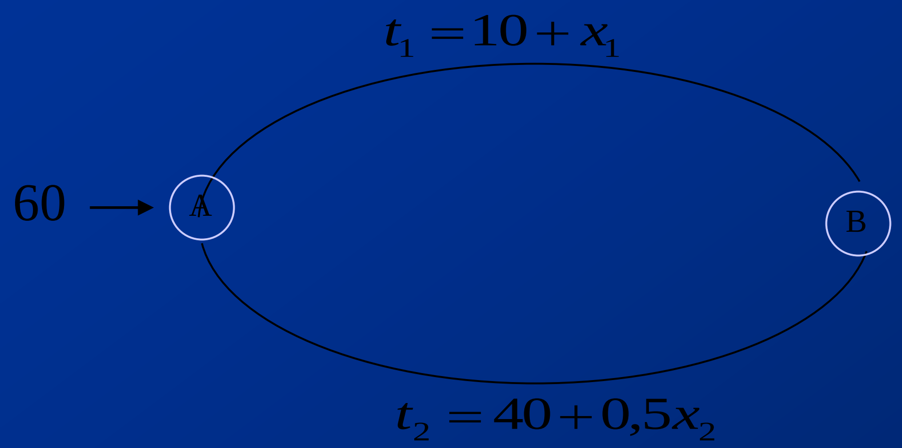
Equilibrio Usuario: Solución Gráfica

Caso demanda inelástica





Ejemplo red simple: equilibrio usuario



Tiempo en minutos y flujos en autos/min.

$$60 = x_1 + x_2 \qquad (1)$$

Si $x_1 > 0$ y $x_2 > 0$

$$t_1 = t_2 = t_{AB} \qquad (2)$$

$$10 + x_1 = 40 + 0{,}5\, x_2$$

$$x_1 = 30 + 0{,}5\, x_2$$

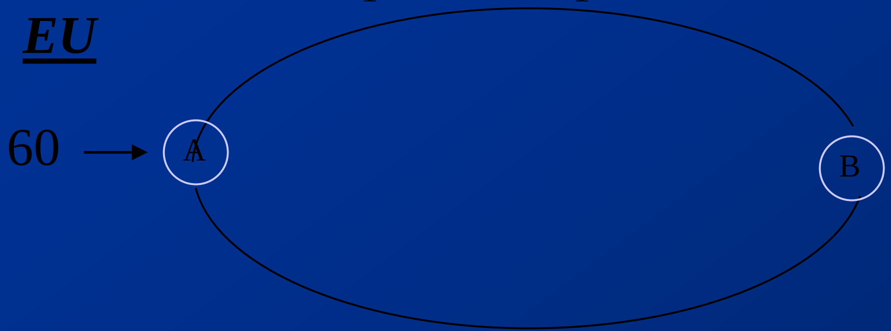
$$\boxed{\begin{aligned} x_2^* &= 20 \\ x_1^* &= 40 \\ t^* &= 50 \end{aligned}}$$

Si usuario de ruta 1 cambia a 2: t_1=49; t_2=50,5
Si usuario de ruta 2 cambia a 1: t_1=51; t_2=49,5
¡No conviene cambiarse!

Ejemplo red simple: óptimo sistema

$$t_1 = 50 \quad x_1 = 40$$

EU

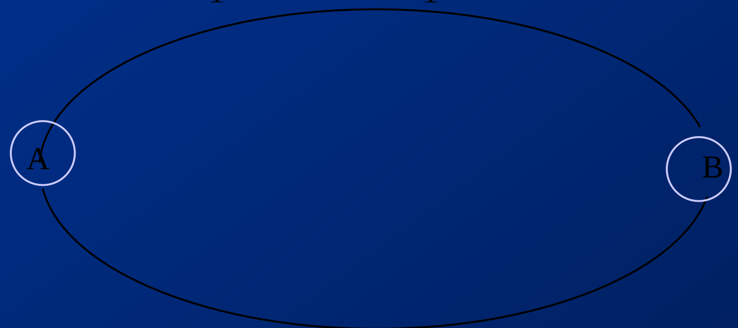


$$t_2 = 50 \quad x_2 = 20$$

Tiempo total =3.000 min.

OS

$$t_1 = 40 \quad x_1 = 30$$



$$t_2 = 55 \quad x_2 = 30$$

Tiempo total =2.850 min.

El *OS* NO ES EQUILIBRIO

Diferencia *OS-EU*: fenómeno de congestión (externalidad). Usuarios   no   perciben tiempo total (social), sino el propio (privado).

EQUILIBRIO DETERMINÍSTICO

Asignación de Equilibrio Determinístico:

i) **Supuestos**:

- Usuarios homogéneos y racionales
- Información perfecta
- El tiempo (costo) de viaje en un arco dependerá de su flujo:

$$c_a = c_a\left(f_a, F_a\right) \qquad\qquad c_a^k = s_a\left(f_a, F_a\right) + \phi^k t_a$$

(Una Clase) (Múltiples Clases)

f_a : flujo asignable F_a : flujo Fijo

EQUILIBRIO DETERMINÍSTICO (cont.)

ii) **Equilibrio de Usuarios**:

a. Principios de Equilibrio

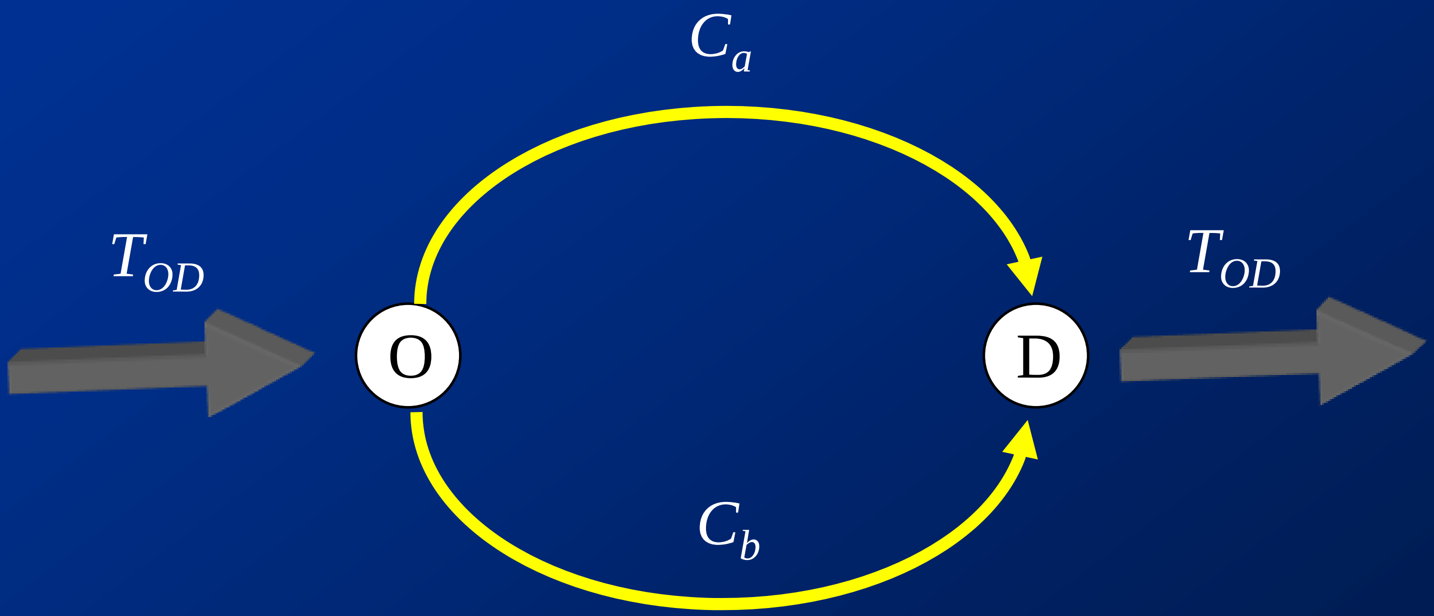
- **Knight**: *se obtendrá un equilibrio de usuario cuando para cada par O-D, los costos de operación de todas las rutas alternativas de la red para dicho par sean iguales*.

- **Wardrop**: *en el equilibrio, ningún usuario puede reducir unilateralmente sus tiempos (costos) de viaje mediante un cambio de ruta*.

- **Smith**: *Los usuarios de la red sólo cambiarán de ruta si el costo total de operación sobre ella, calculado a base de los costos observados antes del cambio, disminuye*.

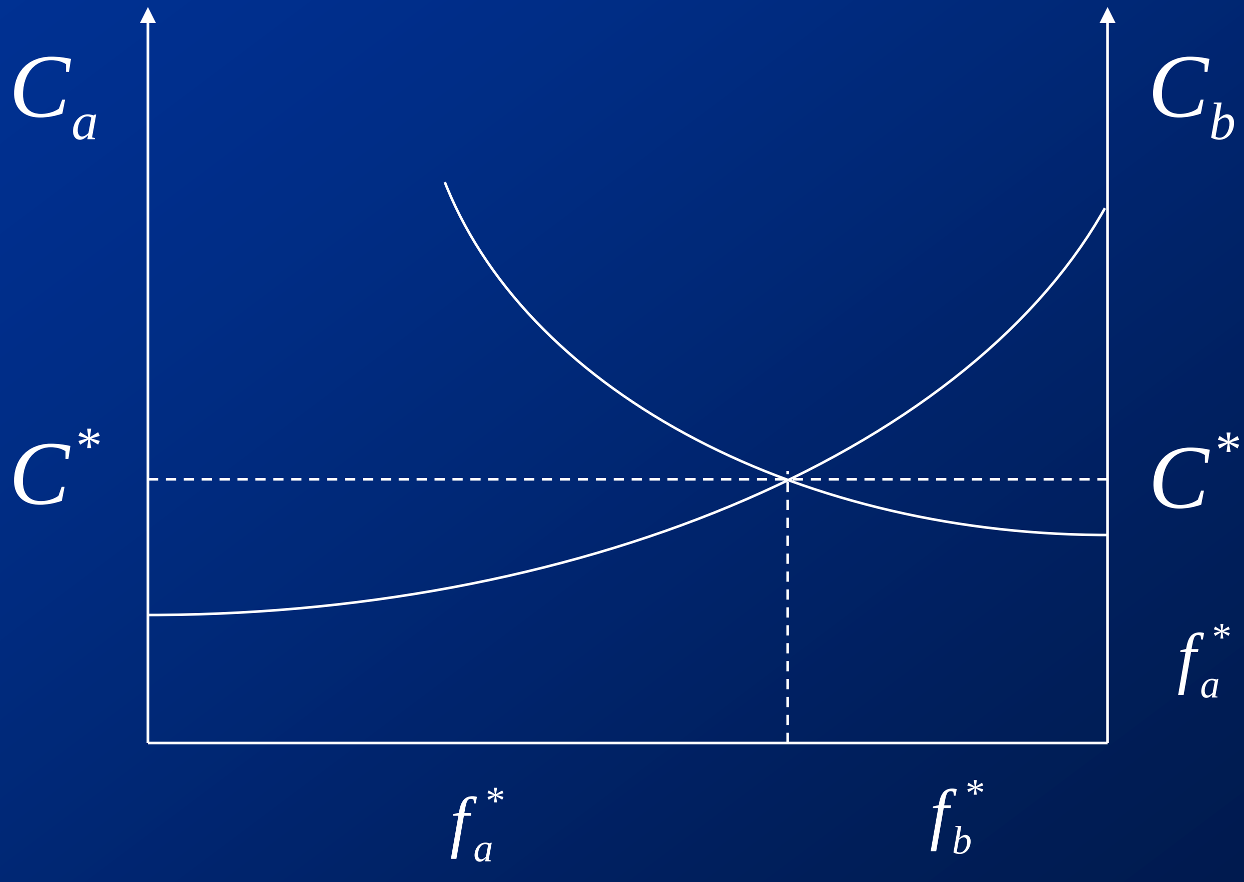
EQUILIBRIO DE USUARIOS

Ejemplo



EQUILIBRIO DE USUARIOS (cont.)

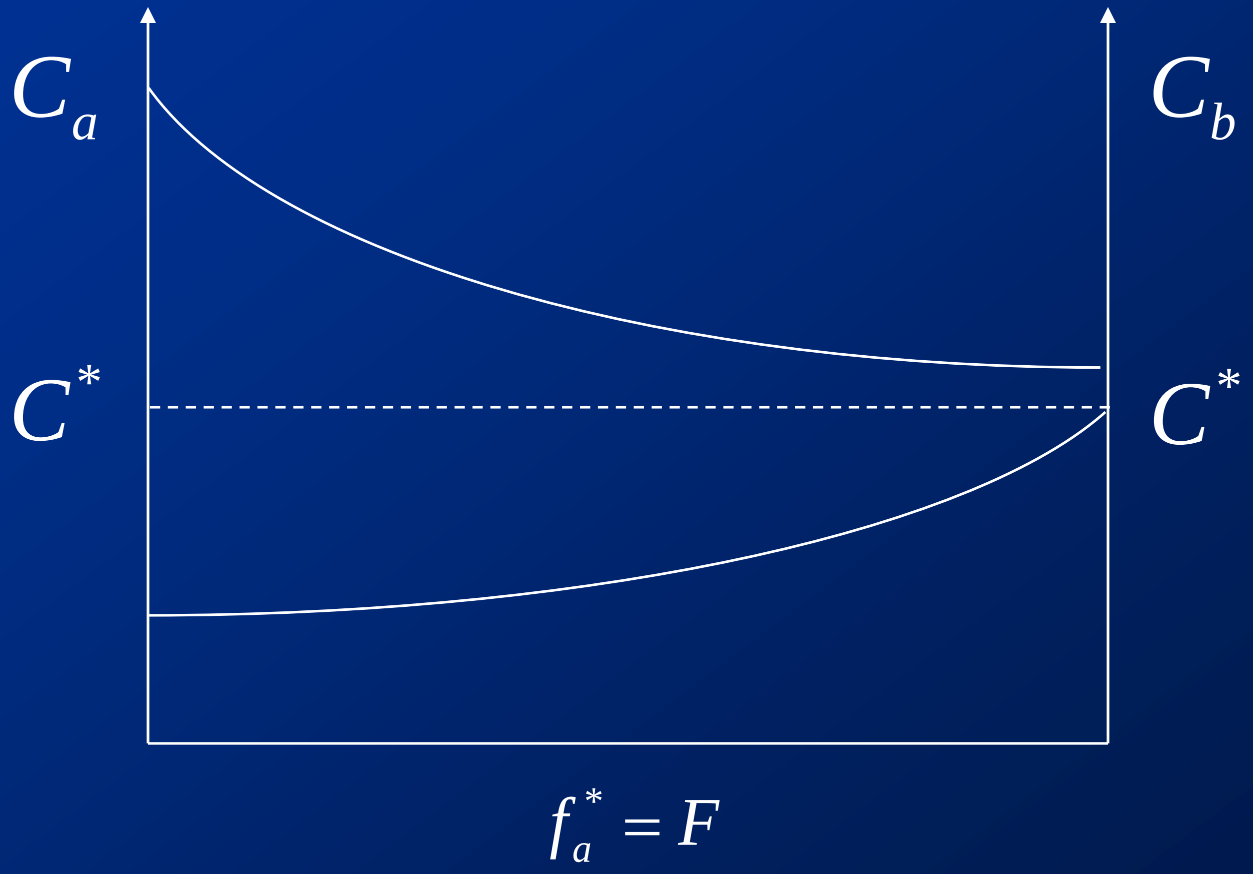
Se cumple Knight, Wardrop y Smith.



$$f_a^* + f_b^* = F$$

EQUILIBRIO DE USUARIOS (cont.)

Se cumple Wardrop y Smith; Knight no



EQUILIBRIO DE USUARIOS (cont.)

b. Condiciones de Equilibrio (una clase de usuarios):

$$C_p \begin{cases} = C_w^* & \forall \quad p \in P_w \,/\, h_p > 0 \\ \\ > C_w^* & \forall \quad p \in P_w \,/\, h_p = 0 \end{cases}$$

Donde $C_w{}^*$ es el costo observado en el equilibrio del par w, C_p es el costo de la ruta p del par w y h_p es el flujo de la ruta p.

EQUILIBRIO DE USUARIOS (cont.)

c. **Formulación Matemática**: (funciones de costo separables)

$$\min_{\{\boldsymbol{f_a}\}} \quad \boldsymbol{Z} = \sum_a \int_0^{f_a} c_a(x)\,dx$$

$$s.a.: \quad \sum_{p \in P_w} h_p = T_w \qquad \forall \ \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$$

$$\sum_{p \in P} \delta_{ap} h_p = f_a \qquad \forall \ \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$$

$$h_p \geq 0 \qquad \forall \ \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{P}$$

EQUILIBRIO DE USUARIOS (cont.)

d. **Unicidad de la Solución**:

- Monótonas Crecientes Estrictas en el Flujo:

$$\frac{\partial c_a}{\partial f_a} > 0 \qquad \frac{\partial^2 c_a}{\partial f_a{}^2} > 0$$

Esto asegura la **unicidad de la solución** en términos de flujos en arcos del problema de Asignación planteado

EQUILIBRIO DE USUARIOS (cont.)

- Forma Funcional BPR: $$t_a(f_a) = t_a^0\left(1+\alpha_a\left(\frac{f_a+F_a}{k_a}\right)^{n_a}\right)$$

t_a : tiempo de viaje en el arco a

t_a^0 : tiempo de viaje a flujo libre en el arco a

f_a : flujo asignable en el arco a (veq)

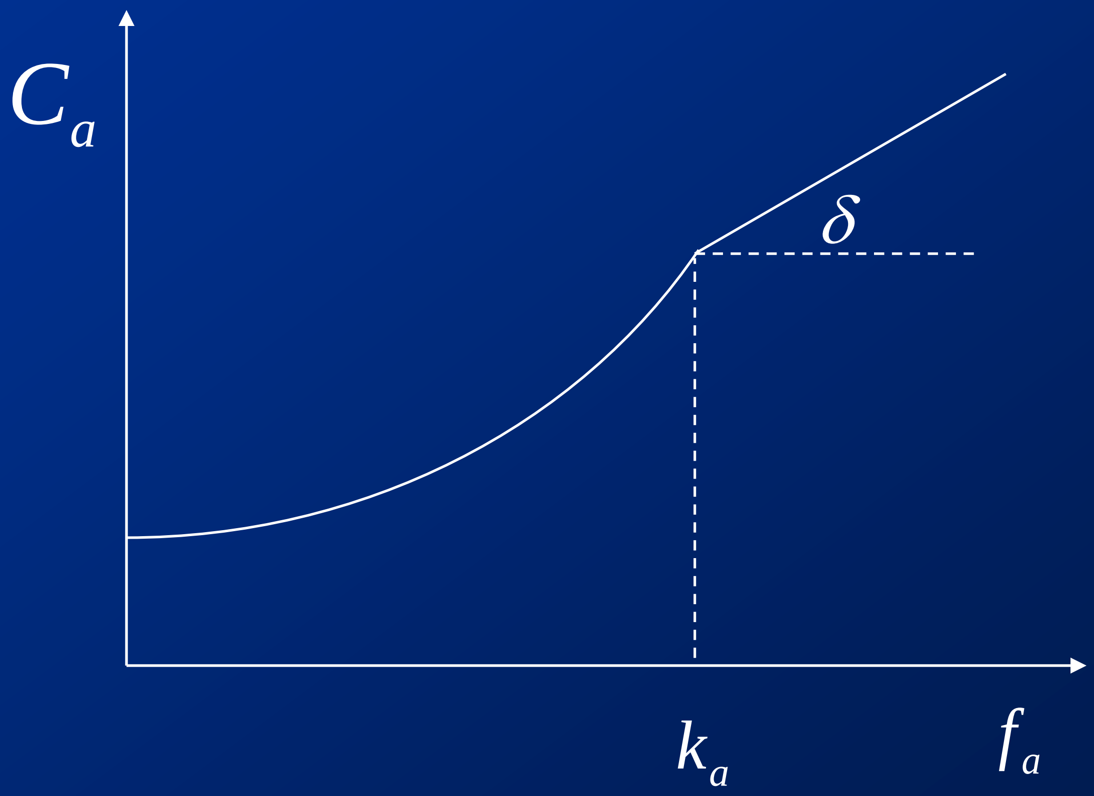
F_a : flujo fijo en el arco a (veq)

k_a : capacidad del arco a (veq)

α_a, n_a : parámetros de calibración del arco a

EQUILIBRIO DE USUARIOS (cont.)

- Parámetro X_SLOPE (δ):



EQUILIBRIO DE USUARIOS (cont.)

$$t_a(f_a) = \begin{cases} t_a^0\left(1+\alpha_a\left(\dfrac{f_a+F_a}{k_a}\right)^{n_a}\right) & \forall \quad f_a+F_a \le k_a \\ t_a^0(1+\alpha_a)+\delta\left(\dfrac{f_a+F_a-k_a}{k_a}\right) & \forall \quad f_a+F_a > k_a \end{cases}$$

La forma lineal que se observa cuando el flujo supera la capacidad representa el comportamiento de los vehículos en las **colas** de los arcos sobrecargados, asumiendo que las colas aumentan linealmente durante el período de simulación (arcos saturados). Además, se mitigan problemas de **convergencia**.

EQUILIBRIO DE USUARIOS (cont.)

e. **Asignación Multiclase**: asigna simultáneamente diferentes clases de usuarios (distintos niveles socioeconómicos).

$$C_p^k \begin{cases} = C_w^{k*} & \forall \quad p \in P_w \,/\, h_p^k > 0 \\ \\ > C_w^{k*} & \forall \quad p \in P_w \,/\, h_p^k = 0 \end{cases}$$

EQUILIBRIO DE USUARIOS (cont.)

Existen tantas funciones de costo en cada arco como clases de usuario:

- Tarificación Vial.
- Peajes.
- Concesiones Viales.

$$c_a^k = s_a\left(f_a\right) + \phi^k t_a$$

EQUILIBRIO DE USUARIOS (cont.)

Formulación Matemática Asignación Multiclase:

$$\min_{\{f_a\}} \quad Z = \sum_a \int_0^{f_a} s_a(x)\,dx + \sum_a \sum_k \phi^k t_a f_a^k$$

$$s.a.: \quad \sum_{p \in P_w} h_p^k = T_w^k \qquad \forall \; w \in W$$

$$\sum_{p \in P} \delta_{ap} h_p^k = f_a^k \qquad \forall \; a \in A$$

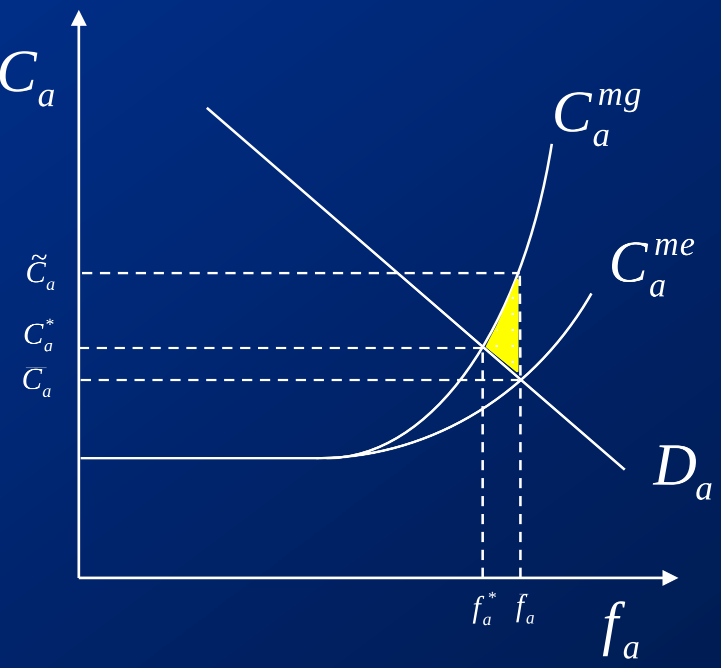
$$\sum_k T_w^k = T_w \qquad \forall \; w \in W$$

$$\sum_k f_a^k = f_a \qquad \forall \; a \in A$$

$$h_p \geq 0 \qquad \forall \; p \in P$$

EQUILIBRIO ÓPTIMO SISTEMA

iii) **Asignación de Equilibrio Óptimo del Sistema**: Minimiza los costos totales de operación sobre la red vial, captando las externalidades por congestión.



EQUILIBRIO ÓPTIMO SISTEMA (cont.)

Formulación Matemática Asignación Óptimo Sistema:

$$\min_{\{f_a\}} \quad Z = \sum_a c_a\left(f_a\right) \cdot f_a$$

$$s.a.: \quad \sum_{p \in P_w} h_p = T_w \qquad \forall \quad w \in W$$

$$\sum_{p \in P} \delta_{ap} h_p = f_a \qquad \forall \quad a \in A$$

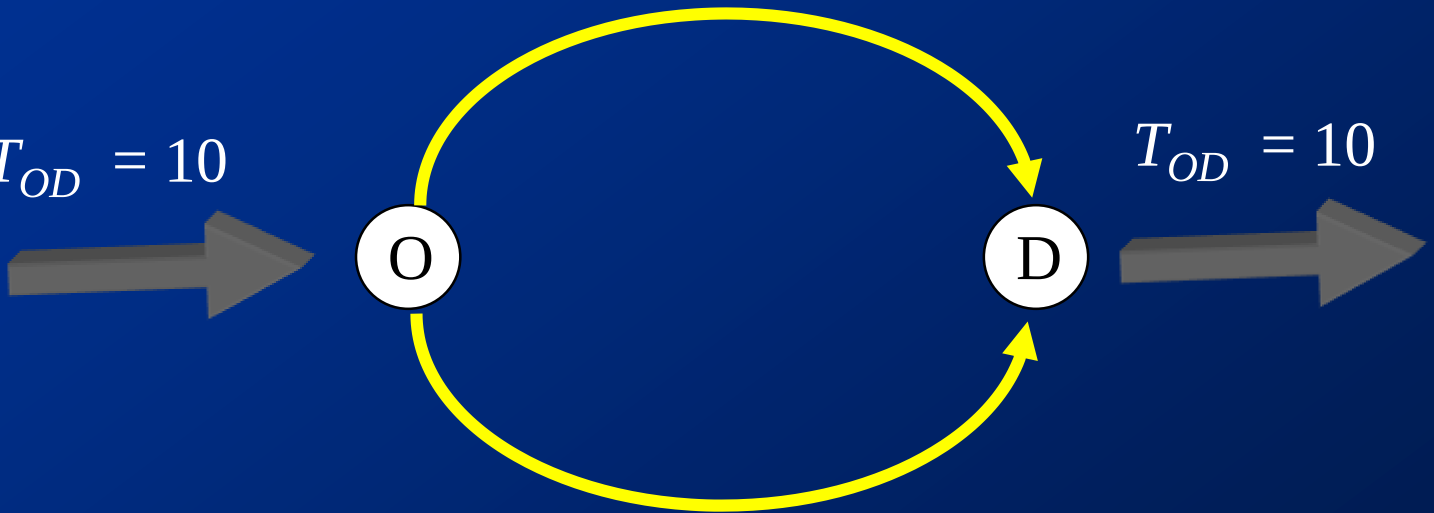
$$h_p \geq 0 \qquad \forall \quad p \in P$$

EQUILIBRIO ÓPTIMO SISTEMA (cont.)

Ejemplo

$$C_a = 150 + f_a^{\,2} \longrightarrow Cmg_a = 150 + 3\,f_a^{\,2}$$

$$T_{OD} = 10 \qquad\qquad T_{OD} = 10$$



$$C_b = 50 + 2f_b^{\,2} \longrightarrow Cmg_b = 50 + 6f_b^{\,2}$$

EQUILIBRIO ÓPTIMO SISTEMA (cont.)

Equilibrio Usuarios:

$f_a = 2{,}7$ $f_b = 7{,}3$

$C_a = 157{,}2$ $C_b = 157{,}2$

$\mathbf{C_{TOTAL} = C_a{*}f_a + C_b{*}f_b = 1.572}$

Equilibrio Óptimo:

$f_a^{\,*} = 4{,}7$ $f_b^{\,*} = 5{,}3$

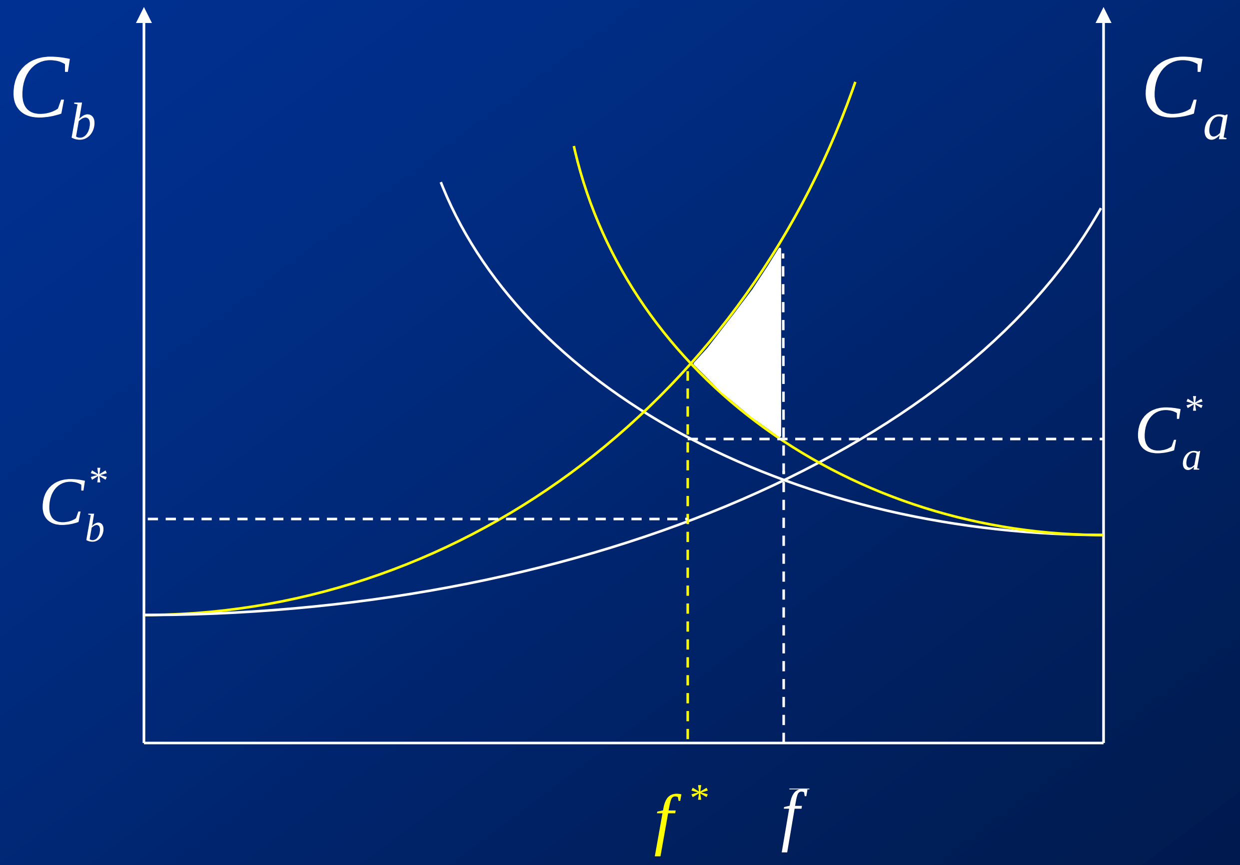
$C_a^{\,*} = 172{,}3$ $C_b^{\,*} = 105{,}7$

$Cmg_a^{\,*} = 217$ $Cmg_b^{\,*} = 217$

$\mathbf{C_{TOTAL}^{\,*} = C_a^{\,*}{*}f_a^{\,*} + C_b^{\,*}{*}f_b^{\,*} = 1.372}$

$\mathbf{\Delta\ \textit{SOCIAL} = 200}$

EQUILIBRIO ÓPTIMO SISTEMA (cont.)



CALIBRACIÓN DE REDES

vii) **Calibración Redes Transporte Privado**:

$$t_a\left(f_a\right)=t_a^0\left(1+\alpha_a\left(\frac{f_a}{k_a}\right)^{n_a}\right)$$

- Medición en terreno de variables t_a^0 y k_a.

CALIBRACIÓN DE REDES (cont.)

$$\min_{\{x_i\}} \quad \sum_a \left(f_a^0 - \tilde{f}_a(\vec{x}) \right)^2$$

$$s.a.: \quad x_i \geq 0 \quad \forall \ i$$

f_a^0 : flujo observado en el arco a (veq)

$\tilde{f}_a$: flujo modelado en el arco a (veq)

x_i : parámetros de calibración

La solución de este problema de optimización se encuentra con el algoritmo de **Hooke y Jeeves**.

ALGORITMO DE SOLUCIÓN

Método del Gradiente (Frank-Wolfe):

1) Partiendo de una solución inicial que cumpla las restricciones del problema, se determina la dirección factible en que la función objetivo disminuye su valor más rápidamente.

2) Una vez determinada la dirección de máximo descenso factible, se determina cuánto se debe descender en dicha dirección para finalmente encontrar una nueva solución.

Este proceso se repite hasta que dos soluciones sucesivas sean suficientemente similares de acuerdo a algún criterio de convergencia (proceso iterativo).

ALGORITMO DE SOLUCIÓN (cont.)

Método del Gradiente (Frank-Wolfe):

a) Encontrar solución inicial factible $\vec{f}_0$

b) Resolver aproximación lineal de función objetivo evaluada en solución inicial factible (obtener solución auxiliar).

$$\begin{array}{ll} min & \nabla Z\left(\vec{f}_0\right)\cdot \vec{y} \\ s.a.: & \Omega \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \vec{y}_0$$

c) Avance desde solución inicial en dirección de máximo descenso:

$$\vec{f}_1 = \vec{f}_0 + \lambda\left(\vec{y}_0 - \vec{f}_0\right)$$

ALGORITMO DE SOLUCIÓN (cont.)

d) Minimización unidimensional.

$$\min_{\{\lambda\}} \quad Z\left(\vec{f}_1\right) = Z(\lambda) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda^*$$

$$s.a.: \quad 0 \le \lambda \le 1$$

e) Encontrar nueva solución y analizar convergencia.

$$\vec{f}_1 = \vec{f}_0 + \lambda^* \left(\vec{y}_0 - \vec{f}_0\right) \qquad\qquad \left|\vec{f}_1 - \vec{f}_0\right| \le \left|\vec{\varepsilon}\right|$$

f) Si convergió, finalizar, sino, volver al paso (b).