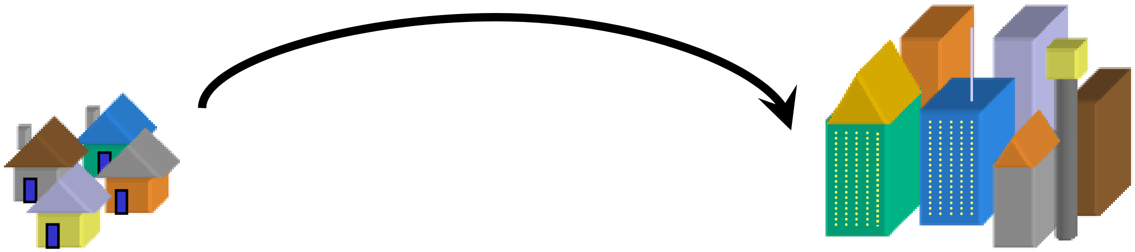
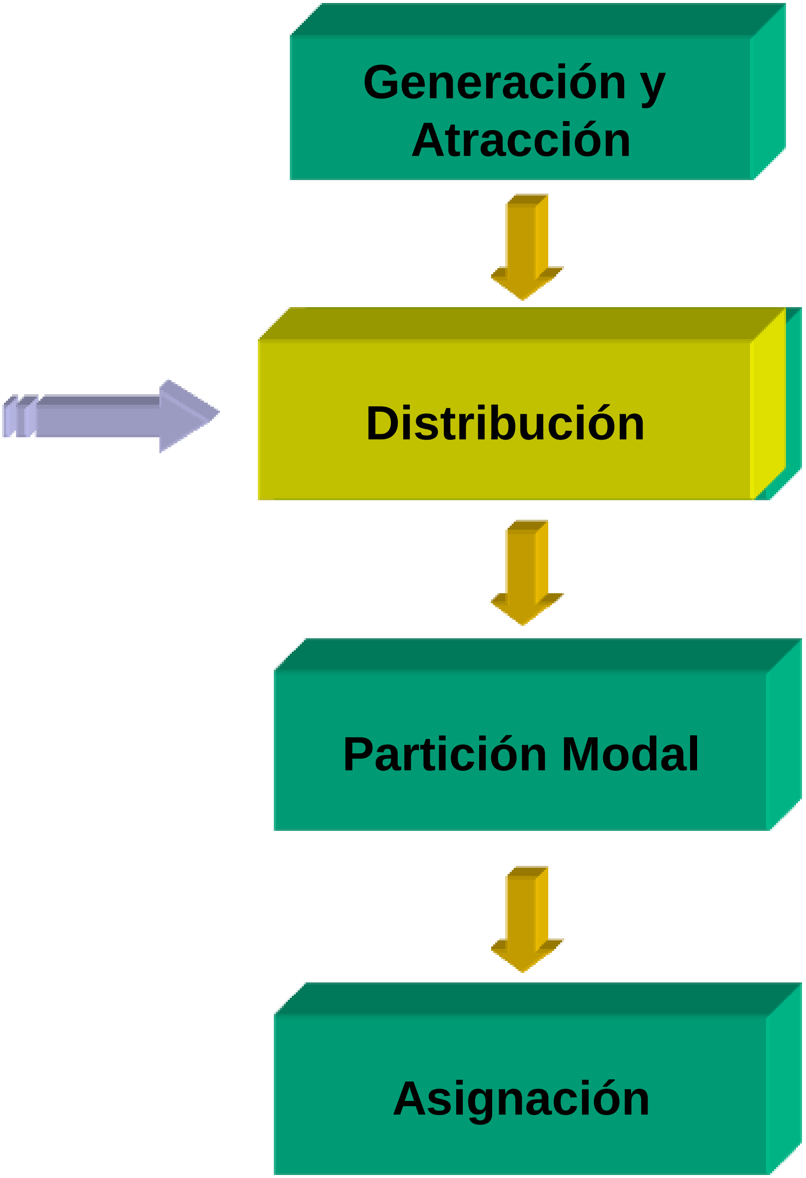
MODELOS DE DISTRIBUCIÓN DE VIAJES




Generación y Atracción
Distribución
Partición Modal
Asignación

DISTRIBUCIÓN

CONTENIDO PRESENTACÍÓN

- Concepto de Distribución.
- Modelos de Distribución.
- Maximización de Entropía.
- Calibración Modelo de Distribución.

CONCEPTO DISTRIBUCIÓN

La etapa de **Distribución** permite estimar el número de viajes realizados durante un determinado período entre las distintas zonas del sistema analizado.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \ldots\ldots & n \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \ldots \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots\ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots\ldots & t_{2n} \\ \ldots & & & \ldots \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots\ldots & t_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_1 \\ O_2 \\ \ldots \\ O_n \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & \ldots\ldots & D_n \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} T \end{bmatrix}
\end{array}
$$

ENFOQUES DE DISTRIBUCIÓN

Existen varios enfoques de modelación, la mayoría modelos matemáticos, para estimar la matriz de distribución de viajes dentro de una determinada área de estudio:

i) **Encuestas de Viajes**: muchas celdas vacías y muy costosas.

ii) **Métodos de Factor de Crecimiento**: consideran que se dispone de una matriz de viajes obtenida de un estudio previo.

- Factor Uniforme: todos los elementos de la matriz crecen a la misma tasa
- Factores de Crecimiento Acotados: cada celda de la matriz crece de acuerdo a información sobre la generación y atracción de viajes de la zona

ENFOQUES DE DISTRIBUCIÓN (cont.)

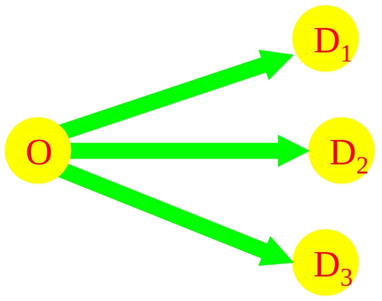
Métodos de Factor de Crecimiento

- Ventajas:
  - Fáciles de entender e implementar
  - Rápida convergencia de los resultados
  - Razonables en áreas estables y en análisis de corto plazo
  - Análisis de Sensibilidad
- Desventajas:
  - Resultados menos exactos
  - Inelásticos ante cambios en la red de transporte (proyectos viales y/o nuevos modos de transporte)
  - Magnifican irregularidades en los viajes

MAXIMIZACIÓN DE ENTROPÍA

iii) **Modelo de Maximización de Entropía**: analicemos el siguiente ejemplo.

Consideremos que el número total de viajes en el sistema (con un solo origen) es $T = 4$ y que T_j representa el número de viajes cuyo destino es la zona *j*.



Supongamos que $T_1 = 1$, $T_2 = 1$ y $T_3 = 2$.

Dado que el total de viajes es 4, existen cuatro individuos (A, B, C y D) en el sistema que pueden repartirse de las siguientes formas:

MAXIMIZACIÓN DE ENTROPÍA (cont.)

Repartición (N)	j = 1	j = 2	j = 3
1	A	B	C-D
2	A	C	B-D
3	A	D	B-C
4	B	A	C-D
5	B	C	A-D
6	B	D	A-C
7	C	A	B-D
8	C	B	A-D
9	C	D	A-B
10	D	A	B-C
11	D	B	A-C
12	D	C	A-B

MAXIMIZACIÓN DE ENTROPÍA (cont.)

El número de reparticiones N se puede obtener también como un problema **combinatorial**:

$$N = \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{2} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} \cdot \frac{3!}{1! \cdot 2!} \cdot \frac{2!}{2! \cdot 0!} = 12$$

¿qué pasaría si $T_1 = 0$, $T_2 = 0$ y $T_3 = 4$?

Repartición (N)	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
1	-	-	A-B-C-D

$$N = \binom{4}{0} \cdot \binom{4}{0} \cdot \binom{4}{4} = \frac{4!}{0! \cdot 4!} \cdot \frac{4!}{0! \cdot 4!} \cdot \frac{4!}{4! \cdot 0!} = 1$$

MAXIMIZACIÓN DE ENTROPÍA (cont.)

Para este caso, en general, el número total de reparticiones N se puede escribir como:

$$N = \binom{T}{t_1} \cdot \binom{T - t_1}{t_2} \cdot \binom{T - t_1 - t_2}{t_3} \cdot \ldots\ldots$$

$$N = \frac{T!}{t_1!\cancel{(T - t_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(T - t_1)!}}{t_2!\cancel{(T - t_1 - t_2)!}} \cdot \frac{\cancel{(T - t_1 - t_2)!}}{t_3!\cancel{(T - t_1 - t_2 - t_3)!}} \cdot \ldots\ldots$$

MAXIMIZACIÓN DE ENTROPÍA (cont.)

Finalmente se obtiene la expresión de **Entropía**:

$$N = \frac{T!}{t_1!t_2!t_3!\ldots} = \frac{T!}{\prod_j t_j!}$$

Considerando el caso general, en el que hay tantos orígenes como destinos, resulta:

$$N = \frac{T!}{\prod_i \prod_j t_{ij}!}$$

MAXIMIZACIÓN DE ENTROPÍA (cont.)

Considerando viajeros homogéneos, la más probable distribución de viajes es la que presenta un mayor número de reparticiones N.

Notar que N es máximo cuando la distribución es uniforme, por lo que todas las celdas tienen el mismo valor (en ausencia de restricciones de generación y atracción). Del mismo modo, el valor de N es mínimo cuando todas las celdas valen cero excepto una que vale T.

Por lo tanto, a menor información, mayor dispersión.

MAXIMIZACIÓN DE ENTROPÍA (cont.)

En el ejemplo, cada repartición de viajes específica de los individuos A, B, C y D corresponde a lo que se denomina **estado micro**. Por otra parte, la distribución propuesta corresponde a un **estado macro** (conjunto de estados micro).

En consecuencia, suponiendo que todos **los estados micro son igualmente probables**, la matriz de distribución estará dada por aquel estado macro que contenga un mayor número de estados micro asociados.

Por lo tanto, la distribución estimada (más probable) será aquella que **maximice el valor de** N (número de estados micro).

MAXIMIZACIÓN DE ENTROPÍA (cont.)

Para determinar la matriz de distribución más probable, se debe resolver el siguiente problema de optimización:

$$\max_{\{t_{ij}\}} \qquad N = \frac{T!}{\prod_i \prod_j T_{ij}!}$$

$$s.a.: \qquad \sum_j T_{ij} = O_i$$

$$\sum_i T_{ij} = D_j$$

$$\sum_i \sum_j T_{ij} c_{ij} = C$$

MAXIMIZACIÓN DE ENTROPÍA (cont.)

A partir del criterio de límite Stirling se tiene que:

$$n^n \approx e^n n! \quad \rightarrow \quad \ln n! \approx n(\ln n - 1)$$

Aplicando una transformación monótona creciente a la expresión *N,* en este caso logaritmo natural, se obtiene:

$$ln\, N = ln\left(\frac{T!}{\prod_i \prod_i T_{ij}!} \right) = ln\, T! \; - \; \sum_i \sum_j ln\, T_{ij}!$$

MAXIMIZACIÓN DE ENTROPÍA (cont.)

Finalmente, y dado que T es constante, la distribución se obtiene resolviendo el siguiente problema de optimización:

$$\min_{\{t_{ij}\}} \quad \sum_i \sum_j T_{ij} \left(ln\, T_{ij} - 1 \right)$$

$$s.a.: \quad \sum_j T_{ij} = O_i \qquad (\mu_i)$$

$$\sum_i T_{ij} = D_j \qquad (\lambda_j)$$

$$\sum_i \sum_j T_{ij} c_{ij} = C \qquad (\beta)$$

MAXIMIZACIÓN DE ENTROPÍA (cont.)

La solución del problema anterior es la siguiente:

$$T_{ij}^{*} = A_i O_i B_j D_j e^{-\beta c_{ij}}$$

donde: $$A_i O_i = e^{-\mu_i} \qquad B_j D_j = e^{-\lambda_j}$$

$$A_i = \frac{1}{\sum_j B_j D_j e^{-\beta c_{ij}}} \qquad B_j = \frac{1}{\sum_i A_i O_i e^{-\beta c_{ij}}}$$

Tipos de modelos

1) Doblemente acotado

$$T_{ij}^{*} = A_i O_i B_j D_j \exp(-\beta c_{ij})$$

$$\sum_j T_{ij} = O_i \qquad \sum_i T_{ij} = D_j$$

Ejemplos:
Distribución de viajes al trabajo

Tipos de modelos...

2) Simplemente acotado <u>origen</u>

$$T_{ij}^{*} = A_i O_i W_j \exp(-\beta c_{ij})$$

$$\sum_j T_{ij} = O_i$$

Ejemplos:

Distribución de empleo con localización residencial conocida

Elección de destino propósito compras

Tipos de modelos...

2) Simplemente acotado <u>destino</u>

$$T_{ij}^{*} = B_j D_j W_i \exp(-\beta c_{ij})$$

$$\sum_j T_{ij} = D_j$$

Ejemplo:
Elección de localización residencial conocida con empleo fijo

Modelos desagregados por cluster

Clusters *n*: tipo de usuario

k: modo de transporte

$$T_{ij}^{*kn} = A_i^{kn} O_i^n B_j^{kn} D_j^n \exp(-\beta^n c_{ij}^k)$$

$$(A_i^{kn})^{-1} = \sum_j B_j^{kn} D_j^n \exp(-\beta^n c_{ij}^k)$$

$$(B_j^{kn})^{-1} = \sum_i A_i^{kn} O_i^n \exp(-\beta^n c_{ij}^k)$$

Noción de acceso

- accesibilidad: beneficio de visitar actividades

Beneficio en origen

Factor de atracción beneficio en destino

Factor de costo

$$acc_i^n = (A_i^{kn})^{-1} = \sum_j B_j^{kn} D_j^n \exp(-\beta^n c_{ij}^k)$$

- atractividad: beneficio de ser visitado

Beneficio en destino

Factor de atracción beneficio en origen

Factor de costo

$$att_j^{kn} = (B_j^{kn})^{-1} = \sum_i A_i^{kn} O_i^n \exp(-\beta^n c_{ij}^k)$$

MAXIMIZACIÓN DE ENTROPÍA (cont.)

Propiedades del Modelo de Maximización de Entropía:

- Presenta un riguroso sustento teórico y entrega solución única.
- Considera los impactos de los niveles de servicio de las redes de transporte (c_{ij}).
- Replica mejor los resultados observados y presenta mejor ajuste estadístico.

CALIBRACIÓN

i) **Calibración del Modelo de Maximización de Entropía**:

La solución general de este modelo, para un determinado período (n), propósito (p) y categoría de usuario (k), es de la forma:

$$T_{ij}^{npk} = A_i^{npk} O_i^{npk} B_j^{np} D_j^{np} e^{-\beta^{npk} c_{ij}^{npk}}$$

Notar que los destinos no están definidos por categorías (k), por lo que es necesario calibrar **simultáneamente** los parámetros de todas las categorías dentro de cada período-propósito.

CALIBRACIÓN (cont.)

El costo representativo (o costo compuesto) para un usuario de categoría k de viajar entre i y j con propósito p y durante el período n, considerando todos los modos de transporte que realmente tiene disponible, se puede escribir como:

$$\tilde{c}_{ij}^{npk} = -EMU_{ij}^{npk} = -ln \sum_{m} e^{\tilde{u}_{ij}^{npkm}}$$

donde $\tilde{u}_{ij}^{npkm}$ es la función de utilidad evaluada con valores de los atributos obtenidos de mediciones en terreno.

CALIBRACIÓN (cont.)

Debido a la cantidad de información disponible, la calibración del parámetro β se obtendrá replicando el **promedio ponderado** de los costos compuestos entre los distintos pares de zonas para cada categoría de demanda:

$$LP_0^{npk} = \frac{\sum_i \sum_j T_{ij}^{0npk} \tilde{c}_{ij}^{npk}}{\sum_i \sum_j T_{ij}^{0npk}}$$

CALIBRACIÓN (cont.)

ii) **Iteración 0**: a) calcular LP_0^{npk}

b) definir un valor inicial para β_0^{npk}; se sugiere empezar con:

$$\beta_0^{npk} = \frac{1}{LP_0^{npk}}$$

CALIBRACIÓN (cont.)

Iteración X: c) con los valores de los parámetros β_0^{npk} calcular los factores de balanceo A_i^{npk} y B_j^{np}

$$A_i^{npk} = \frac{1}{\sum_j B_i^{np} D_i^{np} e^{-\beta_0^{npk} \tilde{c}_{ij}^{npk}}}$$

$$B_j^{np} = \frac{1}{\sum_i \sum_k A_i^{npk} O_i^{npk} e^{-\beta_0^{npk} \tilde{c}_{ij}^{npk}}}$$

CALIBRACIÓN (cont.)

d) generar matrices

$$T_{ij}^{npk} = A_i^{npk} O_i^{npk} B_j^{np} D_j^{np} e^{-\beta^{npk} \tilde{c}_{ij}^{npk}}$$

e) calcular el nuevo costo compuesto

f) comparar LP_x^{npk} con LP_{x-1}^{npk}

CALIBRACIÓN (cont.)

Si la diferencia entre ambos se considera aceptable para todas las categorías de demanda, los parámetros de distribución se consideran calibrados; si no, hacer:

$$\beta_{x+1}^{npk} = \beta_{x}^{npk}\left(\frac{LP_{x}^{npk}}{LP_{x-1}^{npk}}\right)$$

y volver al paso (c).

CALIBRACIÓN (cont.)

La convergencia de este proceso iterativo está garantizada.

Recordar que el balanceo de los factores A_i^{npk} y B_j^{np} requiere de un valor inicial, el cual puede ser uno (en el caso doblemente acotado).

Además, dichos factores de balanceo deben ser **reestimados** para cada cambio en los costos de la red.