CINEMÁTICA DE LOS FLUIDOS

La cinemática de los fluidos trata el movimiento de los mismos sin considerar las causas que los producen. Dicho movimiento se denomina flujo.

Los métodos de estudio que se utilizan son el Método de Euler y el de Lagrange.

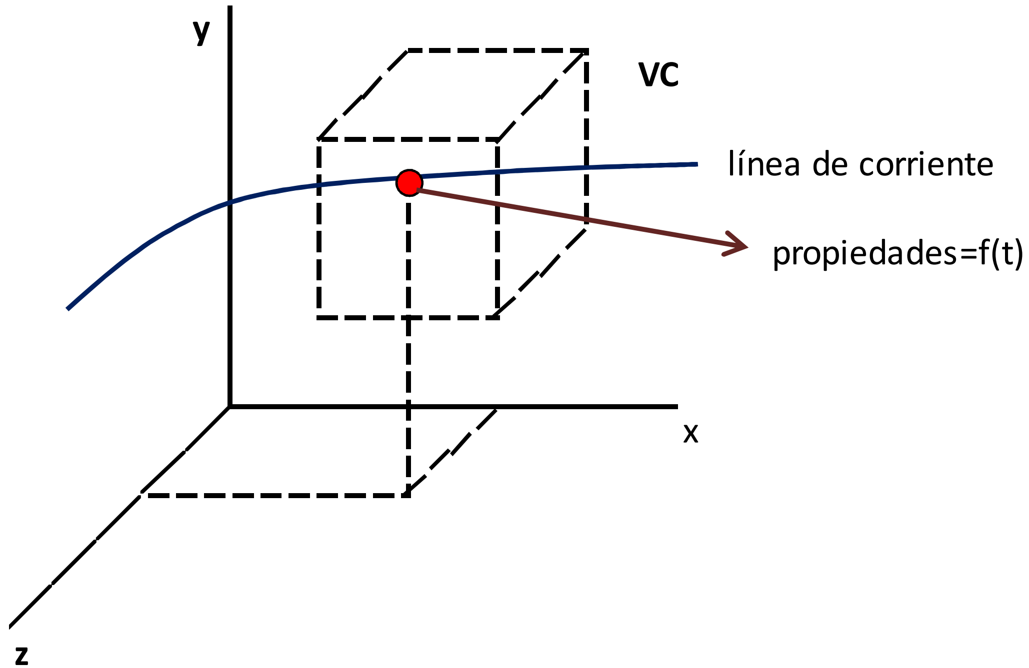
MÉTODO DE EULER

El observador se encuentra en reposo en un PUNTO del espacio y ve cual es la presión, velocidad y demás propiedades en ese punto. El Observador está en reposo. El fluido se renueva constantemente. No interesa la partícula individual, sino la variación de las condiciones del fluido en ese punto.

El enfoque euleriano da la idea de un volumen de control. Es muy usado para fluidos.

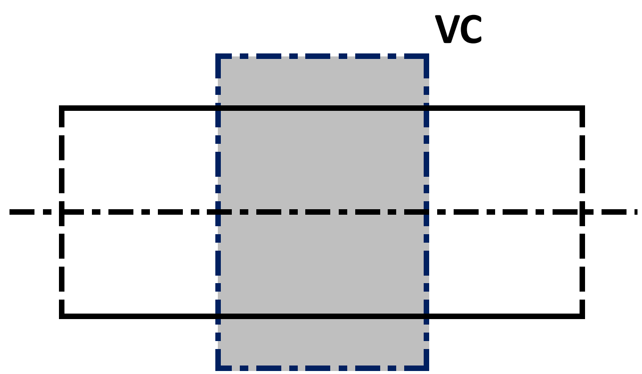
El **VOLUMEN DE CONTROL** es una región específica que no cambia su posición ni su forma.

Se ve qué ocurre para distintos tiempos en el mismo volumen de control.



Enfoque Euleriano:

Los sistemas van pasando. Las partículas se renuevan, son distintas.

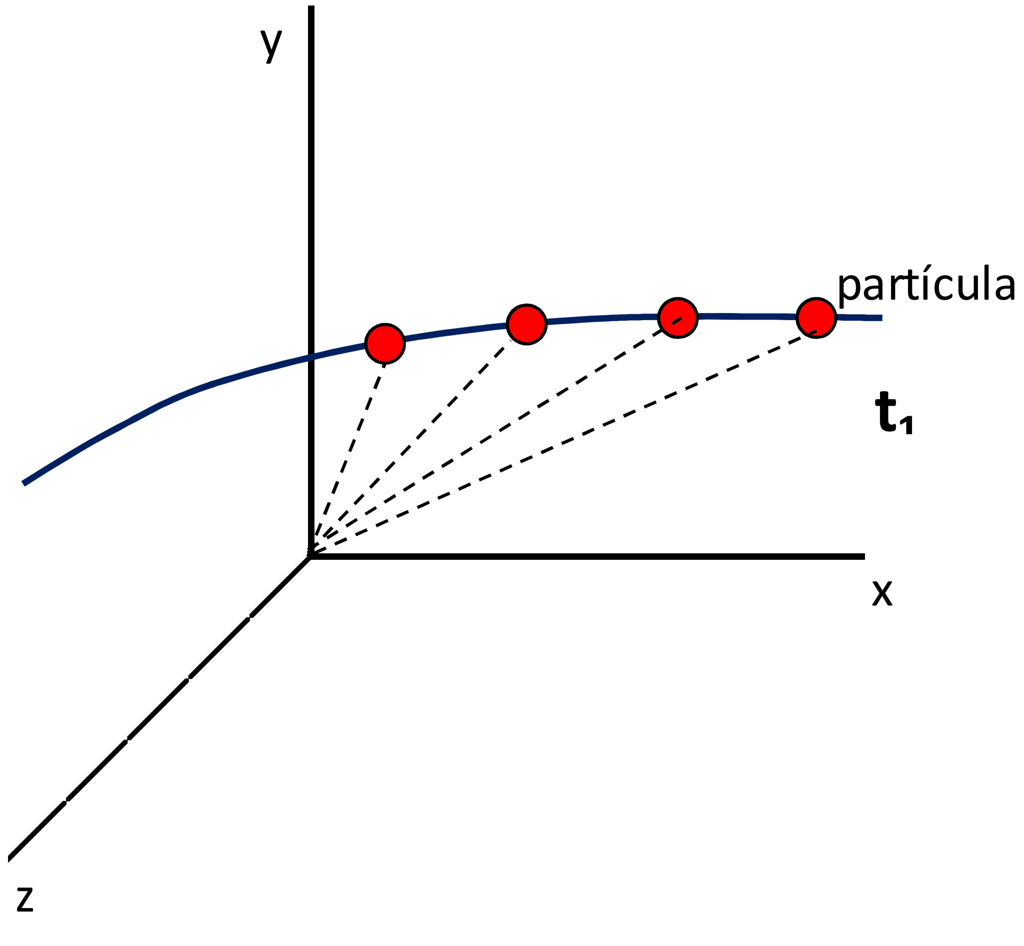


Se utiliza mucho para líquidos.

MÉTODO DE LAGRANGE

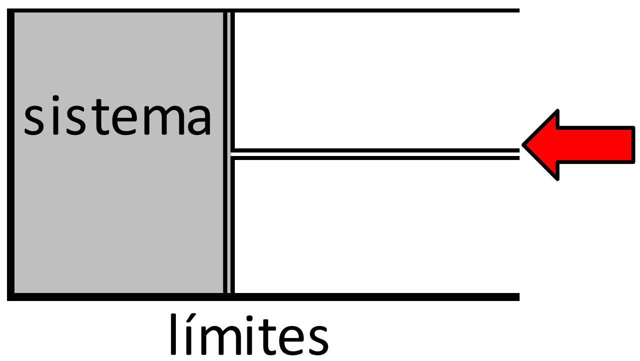
El Observador sigue la partícula y observa como varían sus propiedades en un determinado instante.

Se debe conocer la variación del vector posición en función del tiempo.



Enfoque Lagrangiano

F = m a



Sistema es una cantidad de materia determinada.

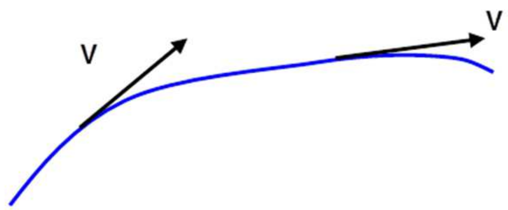
Se consideran siempre la mismas partículas.

Trayectoria:

Es el lugar geométrico de las distintas posiciones ocupadas por una partícula en su movimiento.

Línea de corriente:

Es una línea contínua trazada en el fluido que en todo punto e instante es tangente al vector velocidad



No coincide con la trayectoria salvo en los flujos estacionarios.

Por ser tangente al vector velocidad, ninguno puede atravesarla, por lo que se dice que es impermeable, es decir, no hay flujo .

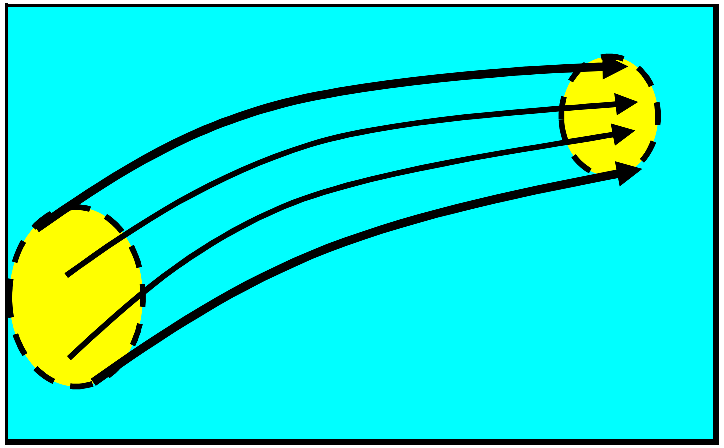
Una partícula que se mueve en la dirección de una línea de corriente tiene, en cualquier instante, un desplazamiento ds,con componentes dx, dy, dz, tiene la dirección del vector v, cuyas componentes son u, v, w, según x, y, z.

Los módulos de las componentes son proporcionales, o sea que, ds y v tienen la misma dirección.

$$dx/u = dy/v = dz/\ dw$$

Ecuación diferencial de una línea de corriente
Cualquier línea contínua que satisfaga esta ecuación, es una línea de corriente.

Tubo de corriente:
Es un conjunto de líneas de corriente dispuestas según una superficie cerrada.



El tubo está formado por líneas de corriente, por lo tanto es impermeable.

La masa que entra al tubo es igual a la que sale. Esto es el principio de conservación de la masa o de continuidad.

CLASIFICACION DE LOS MOVIMIENTOS

MOVIENTO PERMANENTE

Es aquel en el cual las características del movimiento y las propiedades del fluido en cualquier punto no varían con el tiempo

MOVIENTO IMPERMANENTE

Cuando las condiciones en un punto varían en el tiempo.

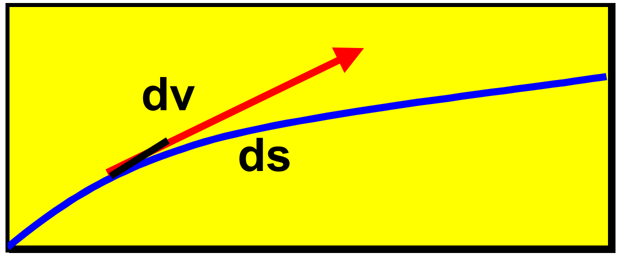
MOVIMIENTO UNIFORME

Es donde la velocidad a lo largo de una línea de corriente se mantiene constante. Cada punto del espacio tiene una velocidad definida.

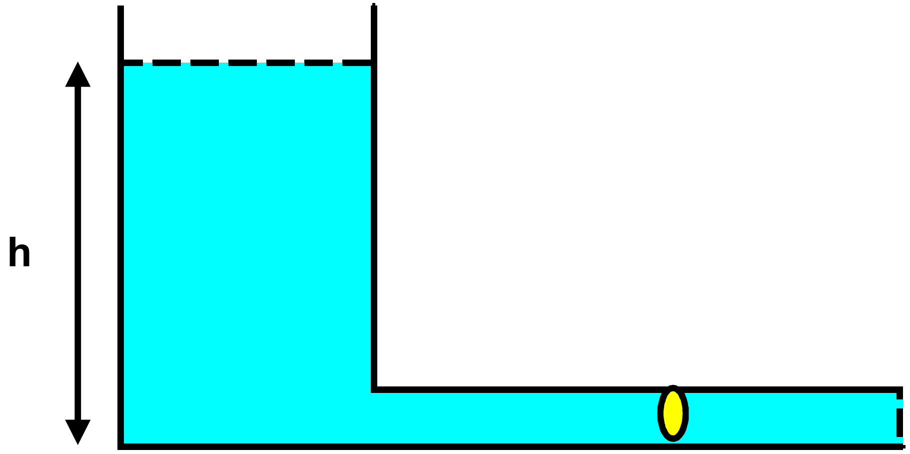
La velocidad no varía en ninguna dirección para un instante dado, pero no dice nada de la variación de velocidad en un punto con el tiempo.

MOVIMIENTO VARIADO

La velocidad varía a lo largo de una línea de corriente.



h: nivel
S: sección

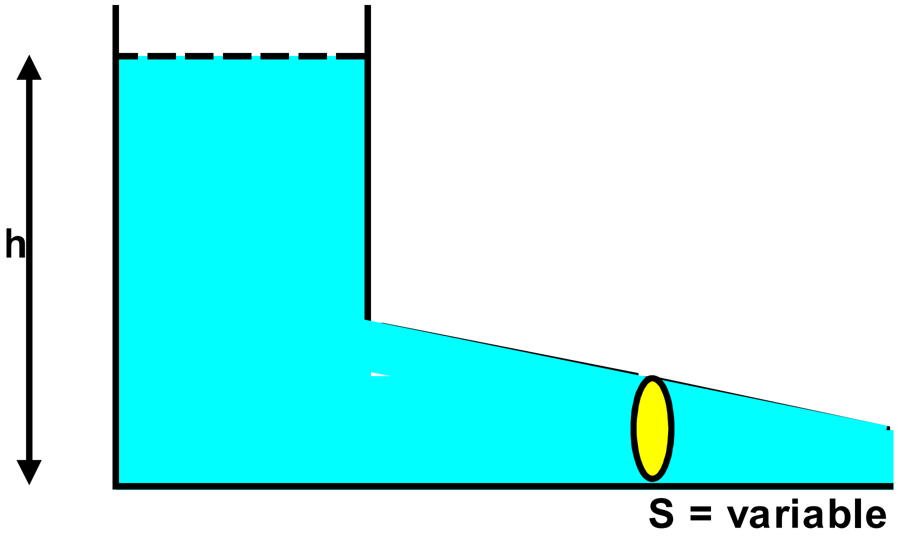


Si h es constante, el caudal es constante, por lo que la velocidad es constante:
MOVIMIENTO PERMANENTE.

Si Sección es constante: MOVIMIENTO UNIFORME.

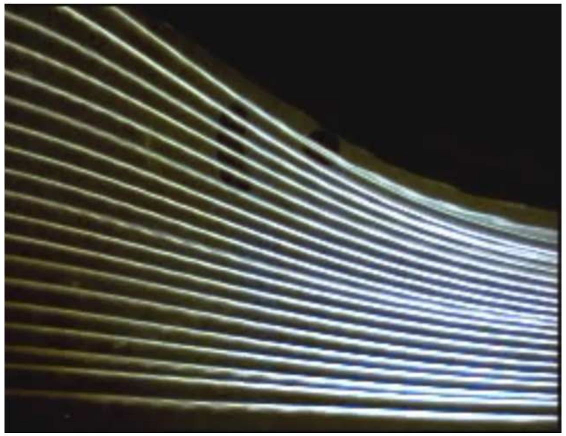
Si h es variable, el caudal varía con el tiempo y también la velocidad:
MOVIMIENTO IMPERMANENTE.

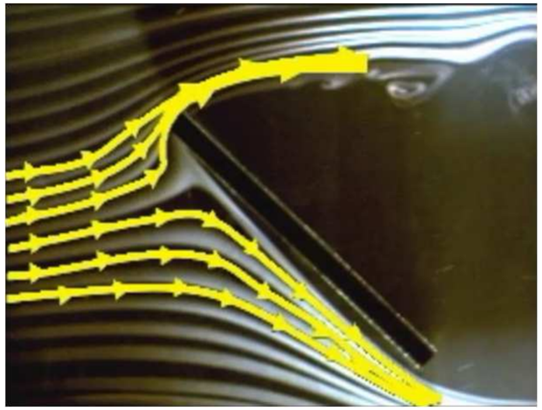
Si S es constante: MOVIMIENTO UNIFORME. Para cada partícula la velocidad es constante, aunque distintas entre sí.

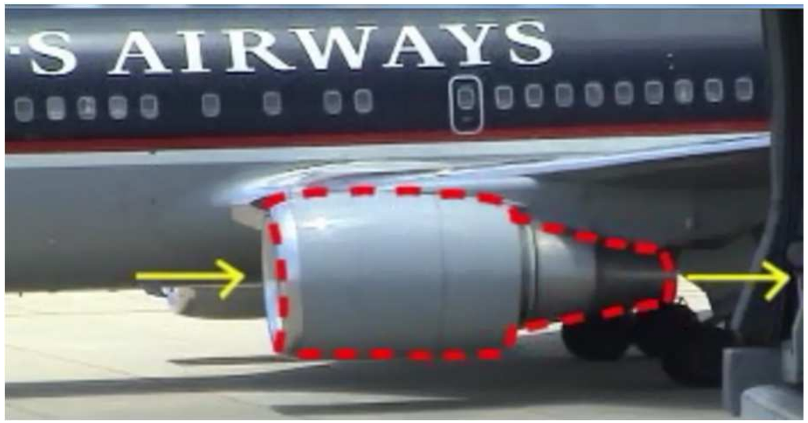


Si h = cte y S # cte, MOVIMIENTO PERMANENTE VARIADO.

Si h # cte y S # cte, MOVIMIENTO IMPERMANENTE Y VARIADO.

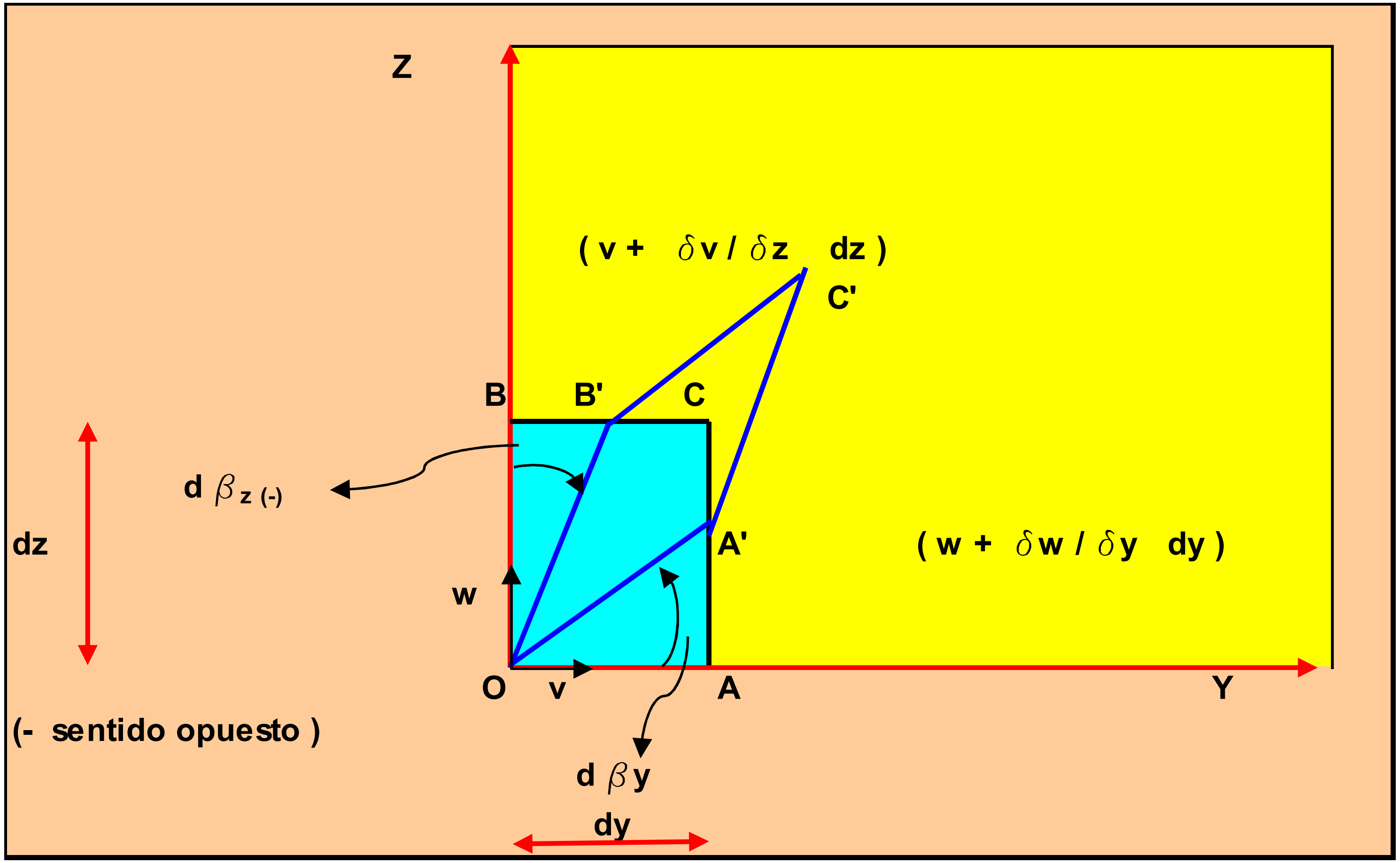






MOVIMIENTO ROTACIONAL

Se produce una deformación angular o rotación de las partículas. Consideramos una partícula cuadrada OABC de un fluido ideal (incompresible y sin rozamiento), ubicada en el origen de coordenadas x, y, z .Las componentes de la velocidad según los ejes x, y, z son u, v y w.



La arista OA gira $d\beta y$ la OB , $d\beta z$, pasando el punto A a A' y el B a B'.

Al principio O y A tenían igual velocidad, pero por la acción de una fuerza, el punto A pasa de:

A a A' : $w \longrightarrow (w + \delta w / \delta y \;\; dy)$

B a B' : $v \longrightarrow (v + \delta v / \delta z \;\; dz)$

La distancia es velocidad por tiempo:

$$AA' = \delta w / \delta y \;\; dy \;\; dt$$

El arco es igual al ángulo por el radio:

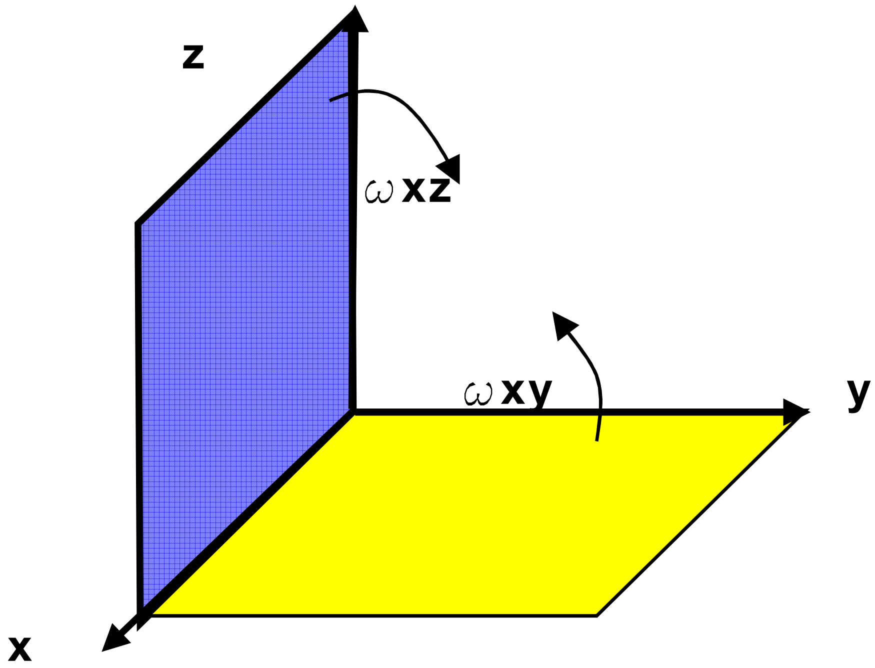
$$AA' = d\,\beta y \;\; dy$$

$$d\,\beta y \;\; dy \;=\; \delta w / \delta y \;\; dy \;\; dt$$

$$d\,\beta y \;/\; dt \;=\; \delta w / \delta y$$

dβy / dt : velocidad angular con la que la partícula tiende a alejarse del plano xy = ωxy.

$$\omega xy = \delta w / \delta y$$



Para BB' :

$$BB' = \delta v / \delta z \;\; dz \;\; dt$$

$$BB' = d\beta z \;\; dz$$

$$d\beta z \;\; dz = \delta v / \delta z \;\; dz \;\; dt$$

$$d\beta z / dt = \delta v / \delta z$$

$$\omega xz = (-) \delta v / \delta z$$

Sentido de rotación contrario.

Diferencial y y diferencial x han girado alrededor del eje x.
La velocidad angular de rotación alrededor del eje x
es el promedio de las velocidades angulares
en cada una de las caras.

Con respecto a x :

$$\omega x = 1/2 \left(\delta w / \delta y - \delta v / \delta z \right)$$

Con respecto a y:

$$\omega y = 1/2 \left(\delta u / \delta z - \delta w / \delta x \right)$$

Con respecto a z:

$$\omega z = 1/2 \left(\delta v / \delta x - \delta u / \delta y \right)$$

La velocidad angular total es:

$$\omega = \omega x + \omega y + \omega z$$

$$V = u\, i + v\, j + w\, k$$

i	j	k
x	y	z
u	v	w

$$\omega = 1/2 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \delta / \delta x & \delta / \delta y & \delta / \delta z \\ u & v & w \end{vmatrix} = 1/2 \text{ rot } \bar{V} = \frac{1}{2} (\nabla \wedge \bar{V})$$

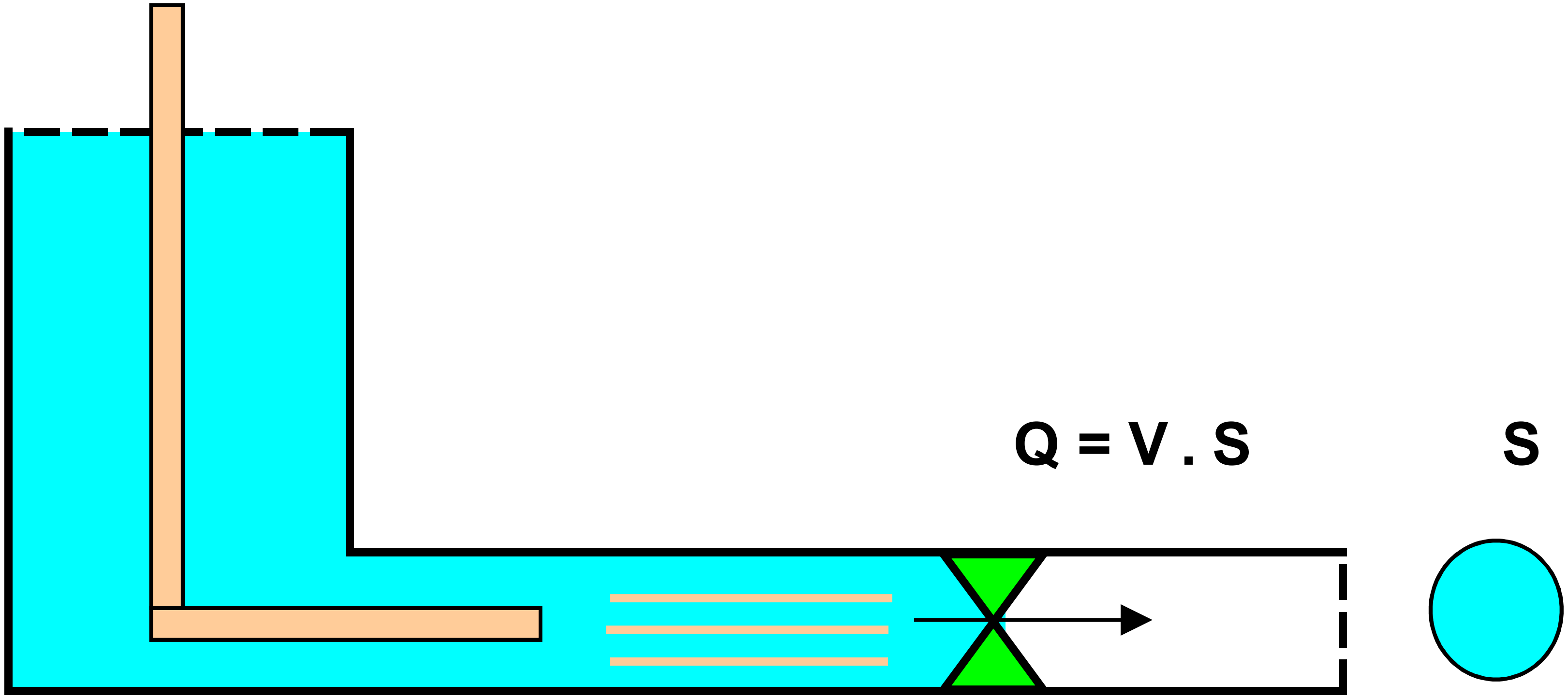
producto vectorial

$$\nabla = \delta / \delta x \;\; i \quad \delta / \delta y \;\; j \quad \delta / \delta z \;\; k$$

Operador nabla , que se aplica a la velocidad.
Cuando el rotor de la velocidad es cero, el movimiento es irrotacional (no hay deformación angular de la partícula)

MOVIMIENTO LAMINAR Y MOVIMIENTO TURBULENTO

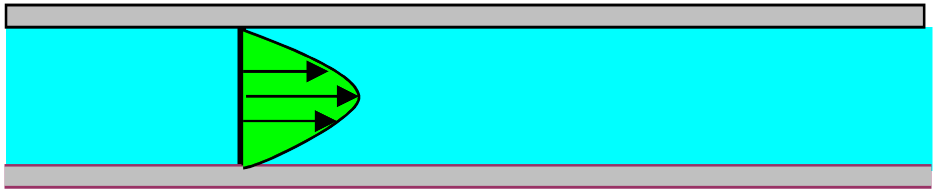
Reynolds colocó un tubo dentro de un depósito con agua y una válvula a la salida. Inyectó colorante y observó que si abría poco la válvula las líneas de corriente se distinguían nítidamente, como si fueran láminas. Al abrir más la válvula las líneas comenzaban a ondularse y finalmente se producían remolinos a mayor apertura, coloreándose toda el agua.Al primer movimiento lo llamó LAMINAR, al segundo de TRANSICION y al tercero TURBULENTO



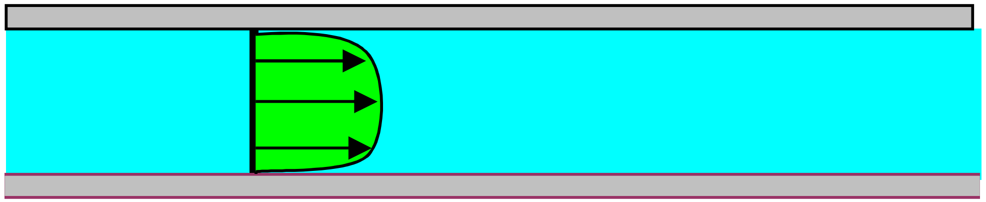
Se formó un parámetro adimensional llamado número de Reynolds:

$$\boxed{Re = V \cdot D / \nu}$$

Para Re menor de 2.000 el régimen es Laminar. Hasta aproximadamente 4.000 es de Transición (no determinado exactamente) y luego Turbulento.
Para movimiento Laminar , la distribución de velocidades en una sección circular es una parábola,
con un máximo en el centro y con valor cero en el contorno.

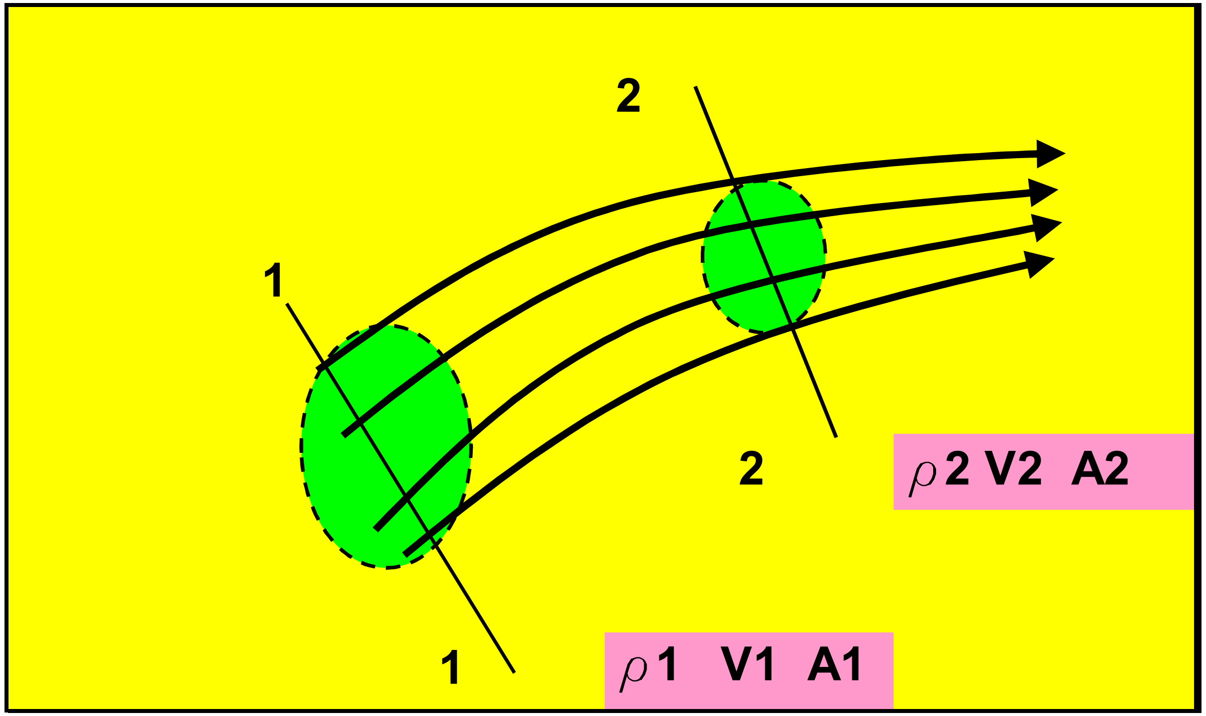


En una tubería la distribución de velocidades en movimiento turbulento es una curva logarítmica. Las partículas chocan entre sí intercambiando energía y las velocidades son más uniformes.



ECUACION DE CONTINUIDAD

En un tubo de corriente no pueden aparecer ni desaparecer masas de fluido, por lo que el caudal que entra es igual al que sale. Considerando un fluido compresible en flujo permanente:



La masa por unidad de tiempo en 1 y en 2 debe ser igual.

$$dm / dt = \rho \ V \ dA$$

$$\boxed{\rho 1 \ V1 \ A1 = \rho 2 \ V2 \ A2}$$

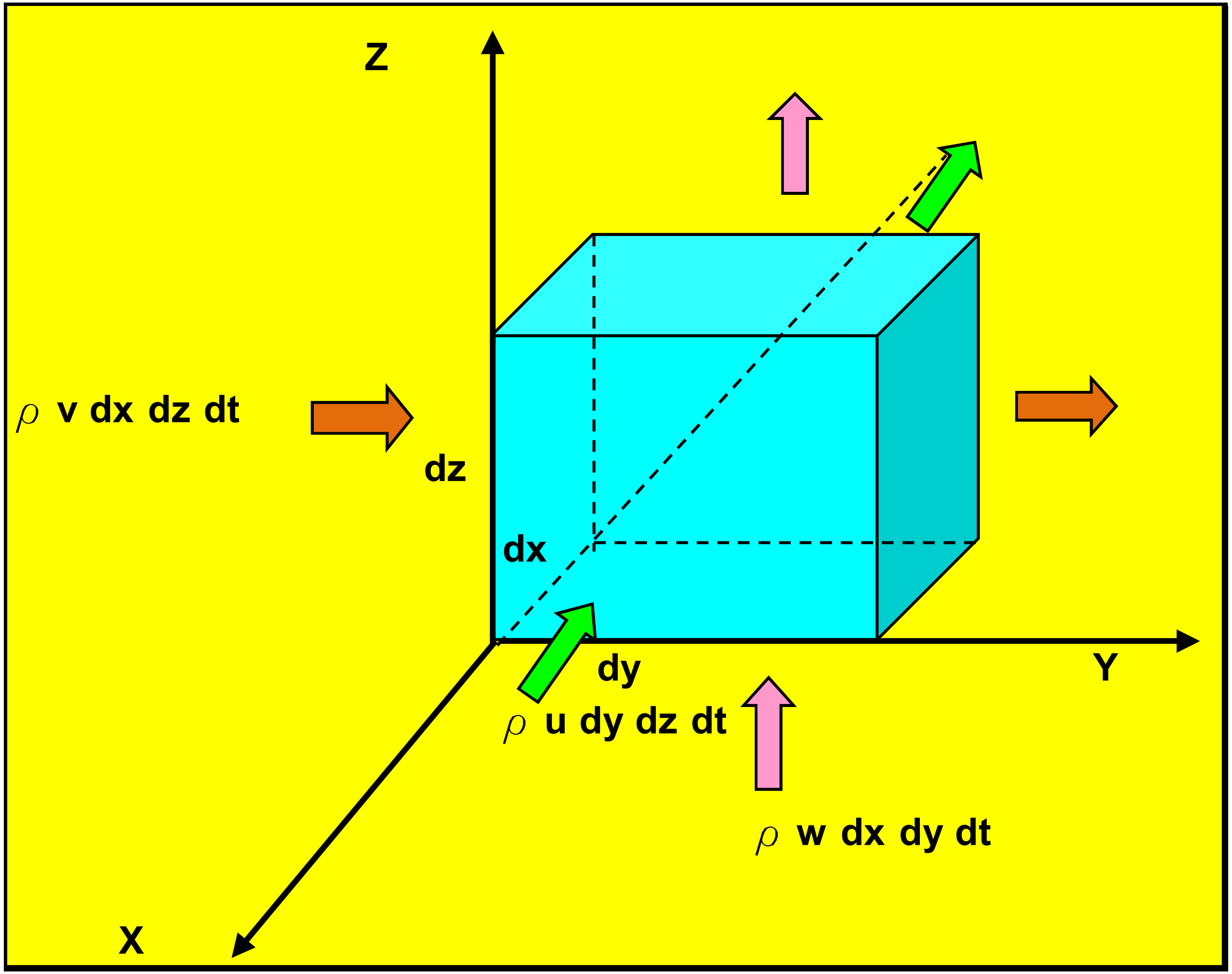
Considera la densidad 1 constante en la sección 1 y la densidad 2 constante en la sección 2.
Las velocidades son velocidades medias.
Si el fluido es incompresible:

$$\boxed{V1 \ A1 = V2 \ A2 = Q}$$

Q = Caudal o gasto.

Condición matemática para que exista continuidad en un fluido

Considerando un volumen diferencial de fluido:



Masa que entra según el eje x.	ρ u dy dz dt
Masa que entra según el eje y.	ρ v dx dz dt
Masa que entra según el eje z.	ρ w dx dy dt

Masa que sale según el eje x.	$(\rho\ u + \delta(\rho u)/\delta x \quad dx \quad) \quad dy\ dz\ dt$
Masa que sale según el eje y.	$(\rho\ v + \delta(\rho v)/\delta y \quad dy \quad) \quad dx\ dz\ dt$
Masa que sale según el eje z.	$(\rho\ w + \delta(\rho w)/\delta z \quad dz \quad) \quad dx\ dy\ dt$

Restando las masas que salen menos las que entran,
tendremos la variación de masa del volumen:

$$[\delta(\rho u)/\delta x + \delta(\rho v)/\delta y + \delta(\rho w)/\delta z] \quad dx \quad dy\ dz\ dt = 0$$

Si se cumple la condición de que la variación de masa es nula (= 0)
y siendo el producto de los diferenciales distinto de cero:

dx dy dz dt # 0

$$\delta(\rho u)/\delta x + \delta(\rho v)/\delta y + \delta(\rho w)/\delta z = 0$$

Es decir que la suma de las derivadas parciales de la velocidad respecto de cada eje es cero. O sea, que la DIVERGENCIA del producto densidad por velocidad es cero:

div (ρ $\overline{v}$) = 0	Para fluidos compresibles. Movimiento permanente
div $\overline{v}$ = 0	Para fluidos incompresibles. Mov. permanente

FUNCION POTENCIAL

Si el rotor de la velocidad es cero, el movimiento se llamó irrotacional, resolviendo el determinante:

$$\omega = 1/2 \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \delta / \delta x & \delta / \delta y & \delta / \delta z \\ u & v & w \end{vmatrix} = 1/2 \text{ rot } \overline{V}$$

$$\text{det} = (\delta w / \delta y - \delta v / \delta z)\, i + (\delta u / \delta z - \delta w / \delta x)\, j + (\delta v / \delta x - \delta u / \delta y)\, k$$

$$\nabla \wedge V = 0$$ Producto vectorial

Si definimos una función φ (x,y,z) escalar, con las siguientes características:

$$\mathbf{u} = \delta\varphi \;/\; \delta\mathbf{x}$$

$$\mathbf{v} = \delta\varphi \;/\; \delta\mathbf{y}$$

$$\mathbf{w} = \delta\varphi \;/\; \delta\mathbf{z}$$

Reemplazando en el determinante:

$$\delta\,\mathbf{w} \,/\, \delta\,\mathbf{y} = \delta^2\varphi \;/\; \delta\mathbf{y}\;\;\delta\mathbf{z}$$

$$\delta\,\mathbf{v} \,/\, \delta\,\mathbf{z} = \delta^2\varphi \;/\; \delta\mathbf{z}\;\;\delta\mathbf{y}$$

Al ser iguales se anula el primer paréntesis y lo mismo ocurre con los otros dos. Es decir, el movimiento es irrotacional, o sea que los movimientos irrotacionales admiten una función potencial.

Siendo el vector velocidad:

$$V = u\,\overline{i} + v\,\overline{j} + w\,\overline{k}$$

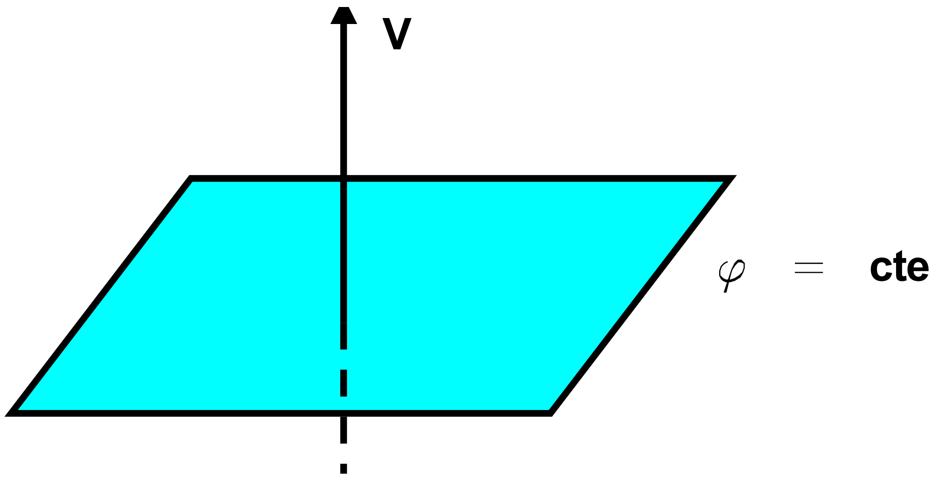
reemplazando:

$$\overline{V} = \delta\varphi/\delta x\,\overline{i} + \delta\varphi/\delta y\,\overline{j} + \delta\varphi/\delta z\,\overline{k} = \nabla\ \mathbf{x}\ \varphi$$

$\nabla\ \mathbf{x}\ \varphi =$ **gradiente de la función potencial**

Producto escalar

El gradiente es un vector perpendicular a la función potencial. Si existe la función potencial, entonces el movimiento es irrotacional. El flujo ideal es irrotacional.



en el plano:

$$d\varphi = \delta\varphi / \delta x \;\; dx + \delta\varphi / \delta y \;\; dy = 0$$

$$u \;\; dx + v \;\; dy = 0$$

$$\boxed{[dy \;/\; dx]_{\varphi = cte} = -u / v}$$

pendiente de las superficies equipotenciales

FUNCION DE CORRIENTE

$u = dx / dt \qquad v = dy / dt \qquad dx / u = dy / v$

$u\, dy - v\, dx = 0$ ec. de una línea de corriente

Si definimos una función de corriente ψ tal que:

$$u = \delta\psi / \delta y \qquad v = (-\delta\psi / \delta x)$$

$$d\psi = \underbrace{\delta\psi / \delta y}_{u}\, dy + \underbrace{\delta\psi / \delta x}_{v}\, dx = 0$$

$$\boxed{[dy / dx]_{\psi = cte} = v / u}$$

pendiente de las líneas de corriente

Comparando se observa que las líneas de corriente son normales a las líneas equipotenciales.

ECUACION DE LAPLACE

Las funciones potencial y de corriente son armónicas conjugadas o funciones de Cauchy - Riemann y si se conoce una, se puede deducir la otra.

$\mathbf{u} = \delta\varphi / \delta \mathbf{x} = \delta\psi / \delta \mathbf{y}$ $\mathbf{v} = \delta\varphi / \delta \mathbf{y} = (-\delta\psi / \delta \mathbf{x})$

Derivando respecto de x e y respectivamente:

$\delta^2\varphi / \delta \mathbf{x}^2 = \delta^2\psi / \delta \mathbf{y}\, \delta \mathbf{x}$ $\delta^2\varphi / \delta \mathbf{y}^2 = (-\delta^2\psi / \delta \mathbf{x}\, \delta \mathbf{y})$

sumando m. a m. :

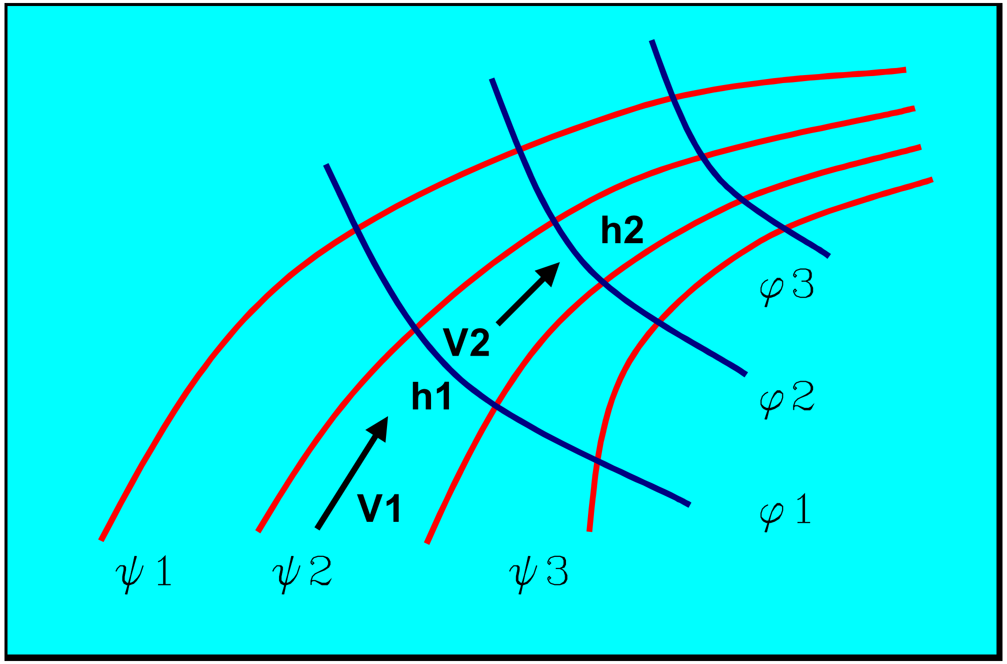
$$\delta^2\varphi / \delta \mathbf{x}^2 + \delta^2\varphi / \delta \mathbf{y}^2 = 0$$

Laplaciano

$\nabla^2 \varphi = 0$ Es decir, cumple la ecuación de Lapalace.

RED DE CORRIENTES

Por cada punto del plano pasa una línea de corriente y perpendicular a ella una línea equipotencial. El conjunto es una red de corriente.



Si la profundidad es unitaria, el flujo es bidimensional y como el caudal entre 2 líneas de corriente es constante:

$$v_1 \ h_1 = v_2 \ h_2 = q = cte$$ ecuación de continuidad

$$h_1 > h_2$$

$$v_1 < v_2$$

Para una línea de corriente se cumple:

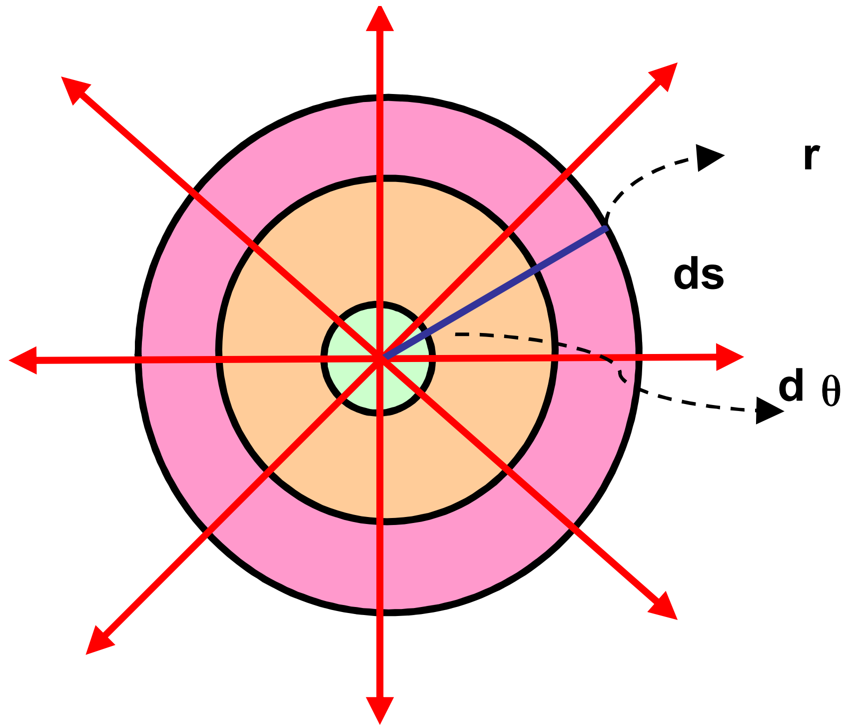
$$\mathbf{P} / \gamma + \mathbf{V}^2 / \mathbf{2\,g} = \mathbf{cte}$$

Si v_1 es menor que v_2, P1 es mayor que P2.

Cuando las líneas de corriente se juntan indican un aumento de velocidad y una disminución de presión.

FUENTES Y SUMIDEROS

Una fuente es un punto de donde emana caudal en todas las direcciones.
La velocidad es radial, el caudal constante y el espesor unitario.



$Q = 2\pi \quad r \quad 1 \quad V$

$V r = Q / 2\pi = k$

para $Q = cte$

$V \quad r = k$ (hipérbola equilátera)

$Q = 2\pi \quad k$

V r = DRALL

Existe una función potencial para flujo irrotacional tal que:

$$V = d\varphi \,/\, dr$$

$$d\varphi = V \, dr$$

$$d\varphi = (Q / 2\pi r) \, dr$$

$$\varphi = (Q / 2\pi \ln r) + C$$

Ecuación de una familia de circunferencias concéntricas. Cada una de ellas es una línea equipotencial de la fuente.

Para la función de corriente:

$$d\psi = V \; ds$$

$$d\psi = Q / 2 \pi r \quad ds$$

$$d\psi = (Q / 2 \pi r) \quad r \; d\theta$$

$$\psi = Q / 2 \pi \quad \theta + C$$

Ecuación de una familia de rectas radiales. Cada una de ellas es una línea de corriente de la fuente.

El conjunto determina la red de corrientes de la fuente.

En un SUMIDERO son válidas las mismas expresiones pero con signos opuestos.

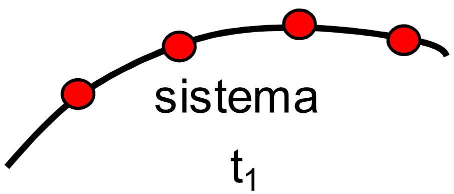
ACELERACIÓN

$V = V(x, y, z, t)$ $\qquad$ $V = u\,i + v\,j + w\,k$

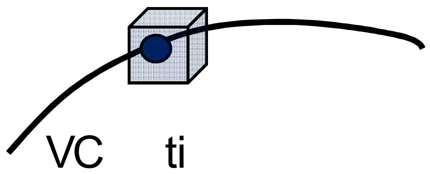
$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{\delta V}{\delta x}\frac{dx}{dt} + \frac{\delta V}{\delta y}\frac{dy}{dt} + \frac{\delta V}{\delta z}\frac{dz}{dt} + \frac{\delta V}{\delta t}$$

derivada total
o sustancial

derivada convectiva o de transporte
Por efecto de la traslación
Indica como varía la velocidad en distintos puntos para un instante determinado (t_1).
Es la velocidad en función de la posición.
Si $\delta V/\delta s = 0$, el flujo es UNIFORME
Es un enfoque Lagrangiano (sólidos) donde las partículas forman el



derivada local
Por efecto de la rotacionalidad
Indica que en un mismo punto la velocidad varía con el tiempo.
Es la velocidad en función del tiempo
Si $\delta V/\delta t = 0$, el el flujo es PERMANENTE. Es un enfoque Euleriano en donde se ve qué pasa en un volumen de control en el tiempo.



ACELERACIÓN

$$V = V(x, y, z, t) \qquad V = u\,i + v\,j + w\,k$$

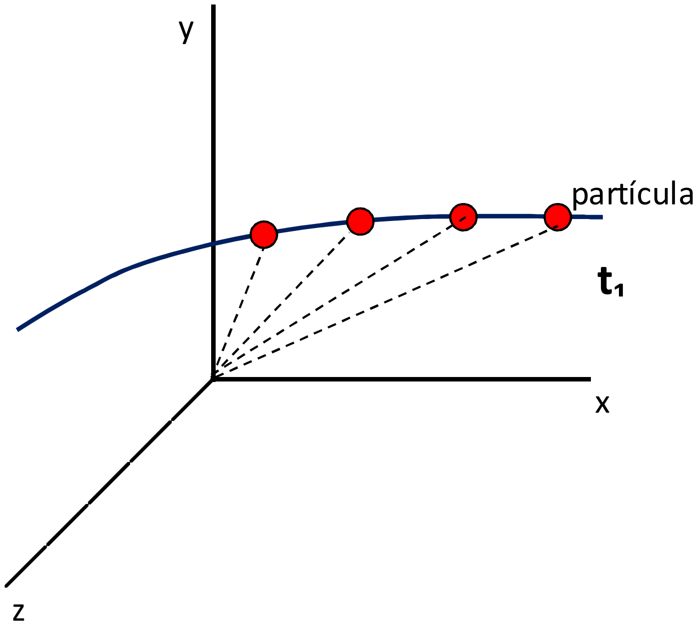
$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{\delta V}{\delta x}\frac{dx}{dt} + \frac{\delta V}{\delta y}\frac{dy}{dt} + \frac{\delta V}{\delta z}\frac{dz}{dt} + \frac{\delta V}{\delta t}$$

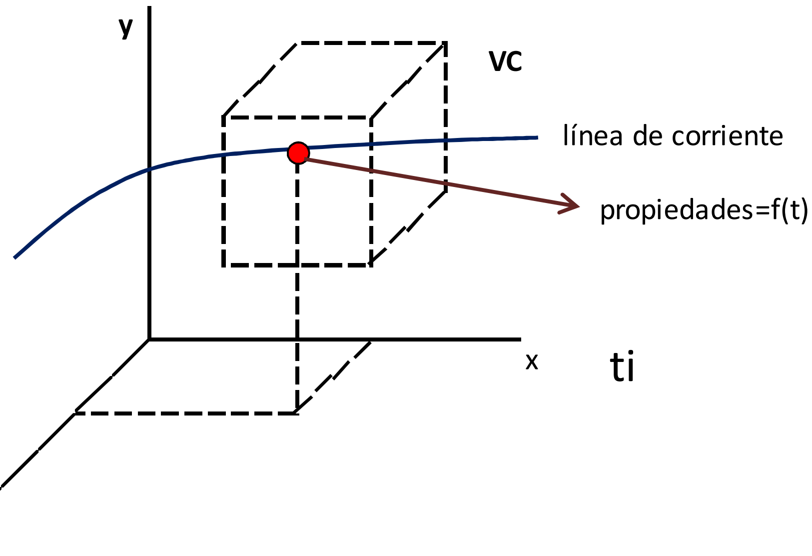
derivada total o sustancial

derivada convectiva o de transporte

derivada local

Si la derivada Convectiva es = 0: Flujo Uniforme





Si la derivada Local es = 0: Flujo Permanente

ACELERACIÓN

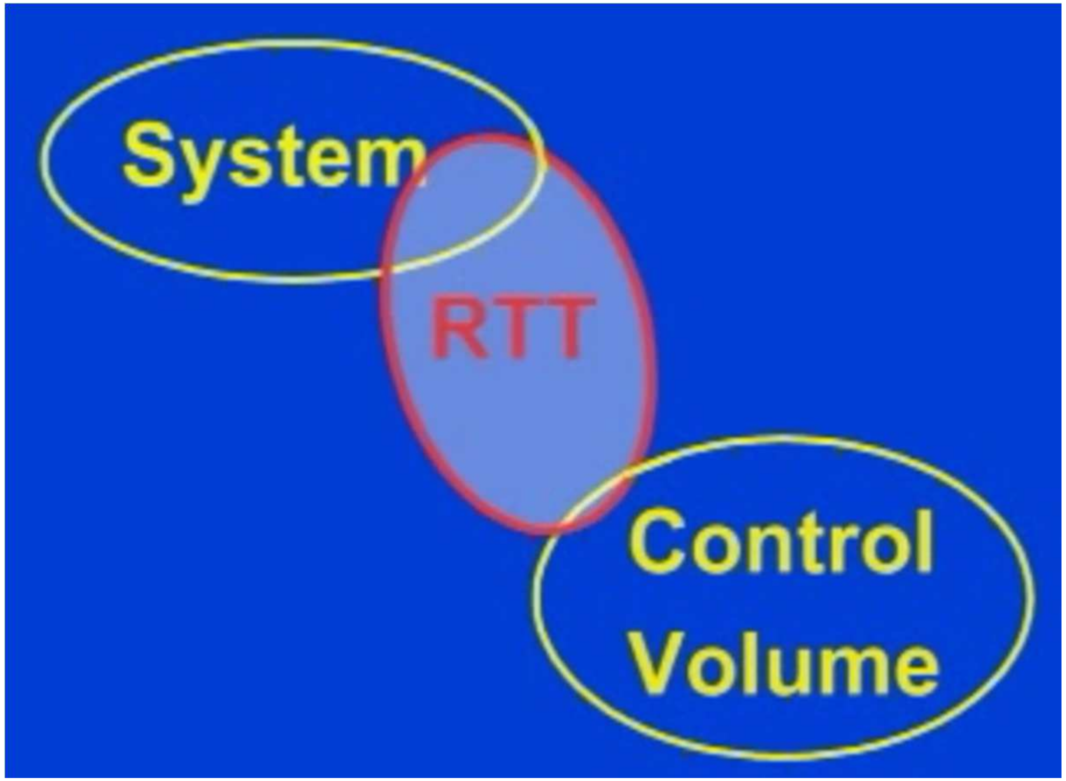
$$V = V(x, y, z, t) \qquad V = u\,i + v\,j + w\,k$$

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

derivada total
o sustancial

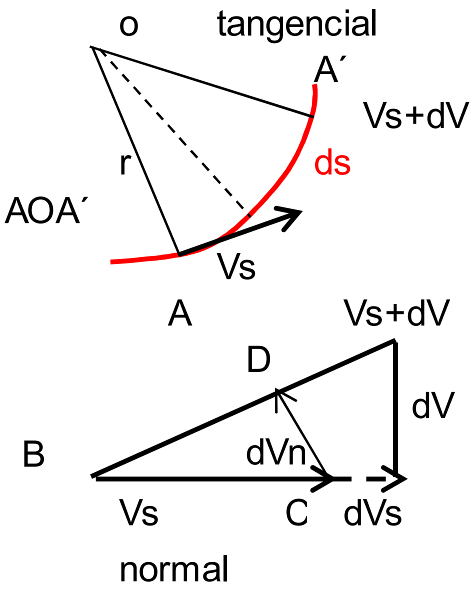
derivada convectiva o de transporte

derivada local



Teoría del Transporte de Reynolds Cengel

La aceleración total es la suma de la aceleración convectiva y la aceleración local, que tiene dos componentes: uno tangencial y otro normal.



De los triángulos AOA´ y CBD, surge:
$ds/r = dVn/Vs$

$$as = dVs/dt = dVs/ds \; ds/dt = Vs \; dVs/ds = 1/2 \; d(Vs^2)/ds$$

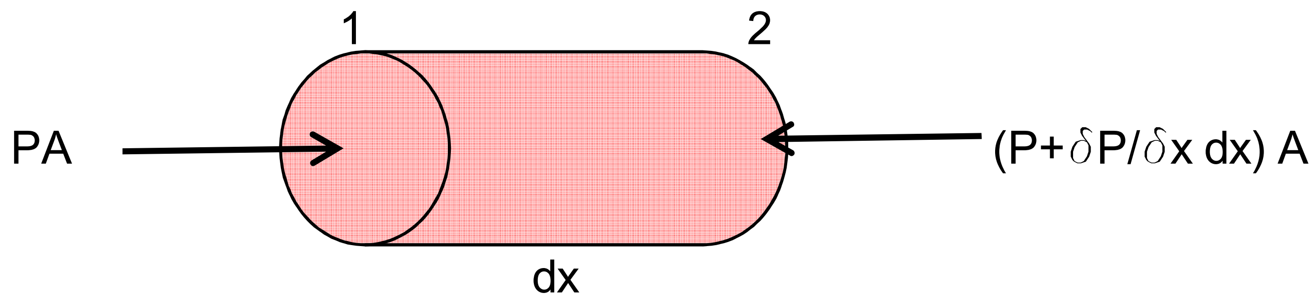
$$an = dVn/dt = dVn/ds \; ds/dt = Vs \; dVn/dt = Vs \; Vs/r = Vs^2/r$$

$$as = \quad 1/2 \; d(Vs^2)/ds \quad + \quad dVs/dt \text{ (local)}$$

$$an = \quad Vs^2/r \quad + \quad dVn/dt \text{ (local)}$$

RELACIÓN ENTRE EL GRADIENTE DE PRESIONES Y LA ACELERACIÓN

Interesa la relación entre la posición y la variación de la velocidad en un flujo.



La resultante en la dirección de x es:

$$Fx = PA - (P + \delta P/\delta x\ dx)\ A$$

$$Fx = -\delta P/\delta x\ \ dx\ A$$

$$Fx = -\delta P/\delta x \; dx \, A = m \, a = \rho \, dx \, A \, a_x$$

$$-\delta P/\delta x = \rho \, a_x$$

$Fx/dx \, A = -\delta P/\delta x = fx$ fuerza por unidad de volumen

$$fx = -\delta P/\delta x = m \, a/V = \rho \quad a$$

Fuerza por unidad de volumen

En la dirección y reemplazando las aceleraciones:

$$fs = -\delta P/\delta s = \rho\ as = \rho\ 1/2\ \delta\ (Vs^2)/\delta s$$

$$fn = -\delta P/\delta n = \rho\ an = \rho\ Vs^2\ /\ r$$

Si consideramos que ρ varía sólo con s, e integrando entre 1 y 2

$$-\int dP/ds = \int P/2\ d(Vs2/\ ds)$$

$P1-P2 = \rho/2\ (Vs_2{}^2 - Vs_1{}^2)$ Variación de presión en función de la velocidad para una línea de corriente

$P1 + \rho\ Vs_1{}^2/2 = P2 + \rho\ Vs_2{}^2/2$ Ecuación de la energía para una LC

Sumando y restando $\rho/2\ dVs^2/dn$ en la ecuación de fn y siendo: $Vs/r=dVn/ds$

$$-dP/dn = \rho Vs\,[dVn/ds - dVs/dn] + \rho/2\, dVs^2/dn$$

El término entre corchetes tiene en cuenta la rotación de la partícula. Si el movimiento es irrotacional el término es cero

$$-dP/dn = \rho/2\, dVs^2/dn$$

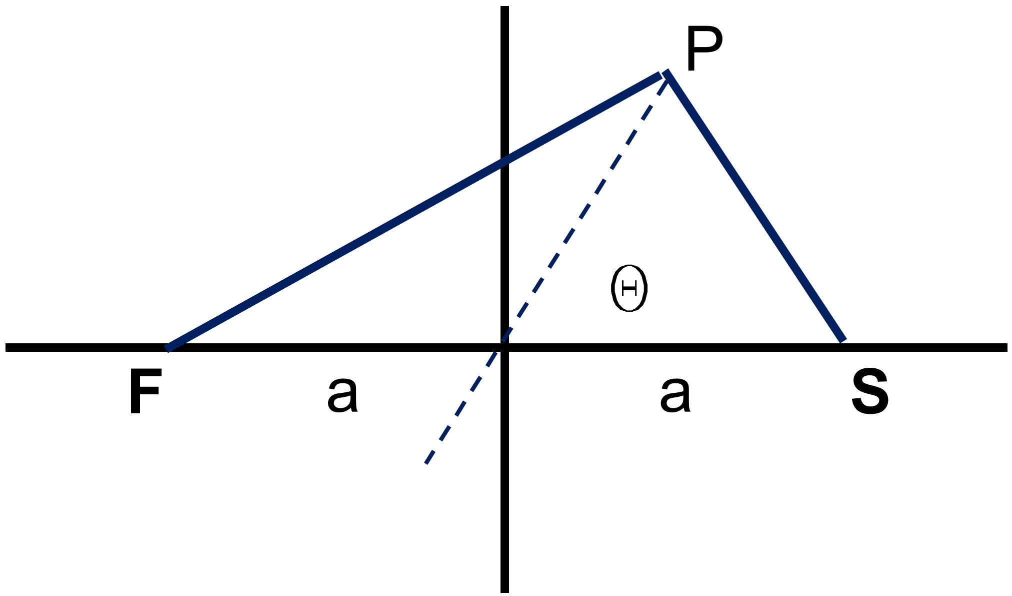
$$P1 - P2 = \rho/2\,(Vs_2^{\,2} - Vs_1^{\,2})$$

$$P1/\gamma + Vs_1^{\,2}/2g = P2/\gamma + Vs_2^{\,2}/2g = cte$$

Se concluye que todo movimiento irrotacional es a energía constante. Cuando el movimiento es irrotacional, la energía de la partícula es constante para cualquier línea de corriente.

Flujo alrededor de un cilindro de sección circular

El doblete bidimensional se define como el caso límite de una fuente y un sumidero de igual intensidad que se aproximan el uno al otro de tal forma que el producto de su intensidad por la distancia entre ellos permanece constante.



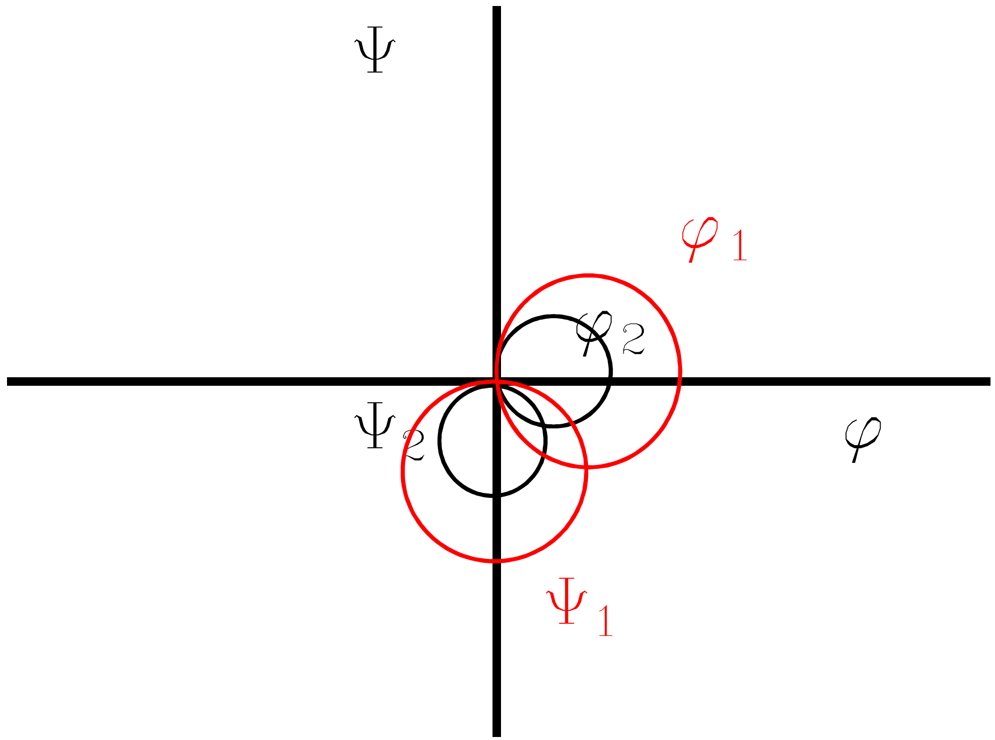
i 2 a = k   i = caudal o intensidad

Potencial de velocidad para fuente o sumidero

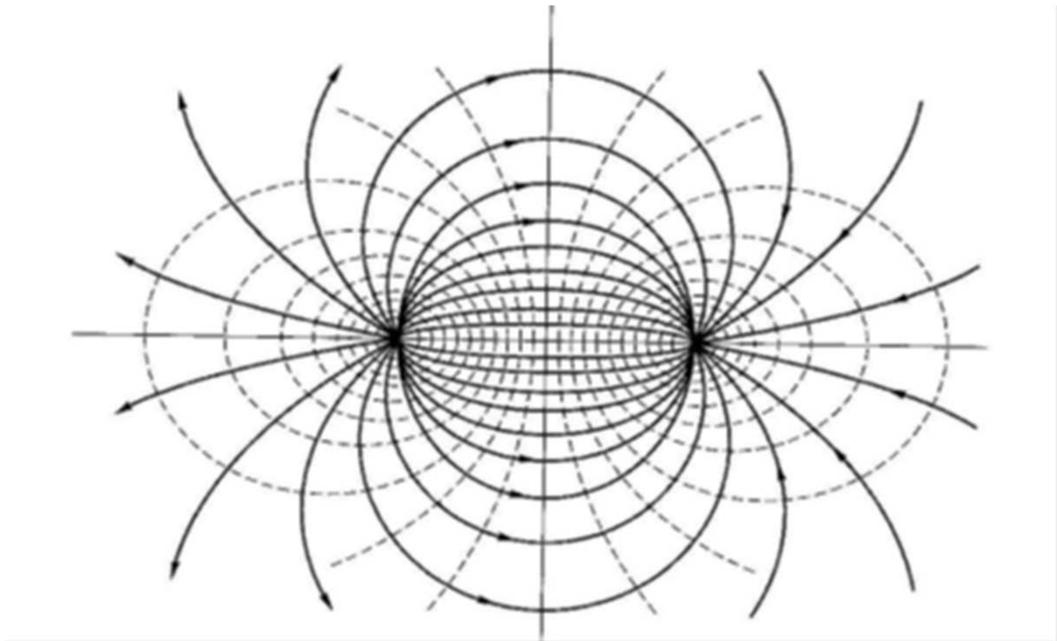
$$\varphi = \mathbf{k \cos \Theta \ / \ r}$$

Función de corriente para ambos:

$$\psi = \mathbf{- k \ sen \ \Theta \ / r}$$



Ψ
φ_1
φ_2
Ψ_2
φ
Ψ_1



COMBINACIÓN DE UN DOBLETE CON UNA CORRIENTE UNIFORME

La corriente uniforme es paralela a l eje x. De la combinación surgió el movimiento que se produciría alrededor de un cilindro de sección circular ubicado en una corriente uniforme.

Red de corriente para un flujo uniforme:

$$\varphi = U\,x = U\,r \cos \Theta$$

$$\Psi = U\,y = U\,r\,\mathrm{sen}\,\Theta$$

Red de corriente debida a un doblete:

$$\varphi = k \cos \Theta \;/\; r$$

$$\Psi = -\,k\;\mathrm{sen}\,\Theta / r$$

La suma de la red de corriente de un flujo debido a un doblete con la de un flujo uniforme da por resultado la red de corriente correspondiente a un flujo alrededor de un cilindro circular.

$$\varphi = U\,r \cos \Theta + k \cos \Theta / r$$

$$\Psi = U\,r\,\mathrm{sen}\,\Theta - k\ \mathrm{sen}\,\Theta / r$$

$$\Psi = \mathrm{sen}\,\Theta\,(U\,r - k / r)$$

La línea de corriente para $\Psi = 0$ está dada por:

$$\operatorname{sen}\Theta\,(U r - k / r) = 0$$

$$\operatorname{sen}\Theta = 0 \qquad \Theta = 0°$$

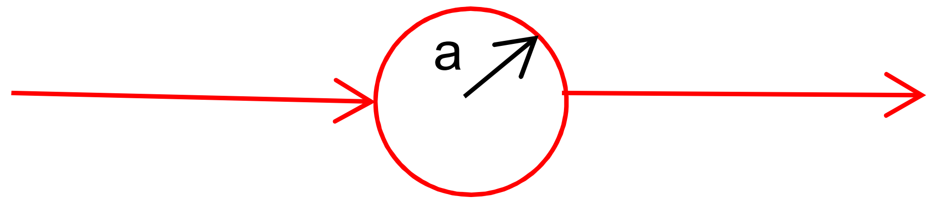
$$\Theta = 180°$$

$$U r = k / r$$

$$r^2 = U / k$$

$$r = (k/U)^{1/2} = a$$

La línea de corriente será una circunferencia de radio a:



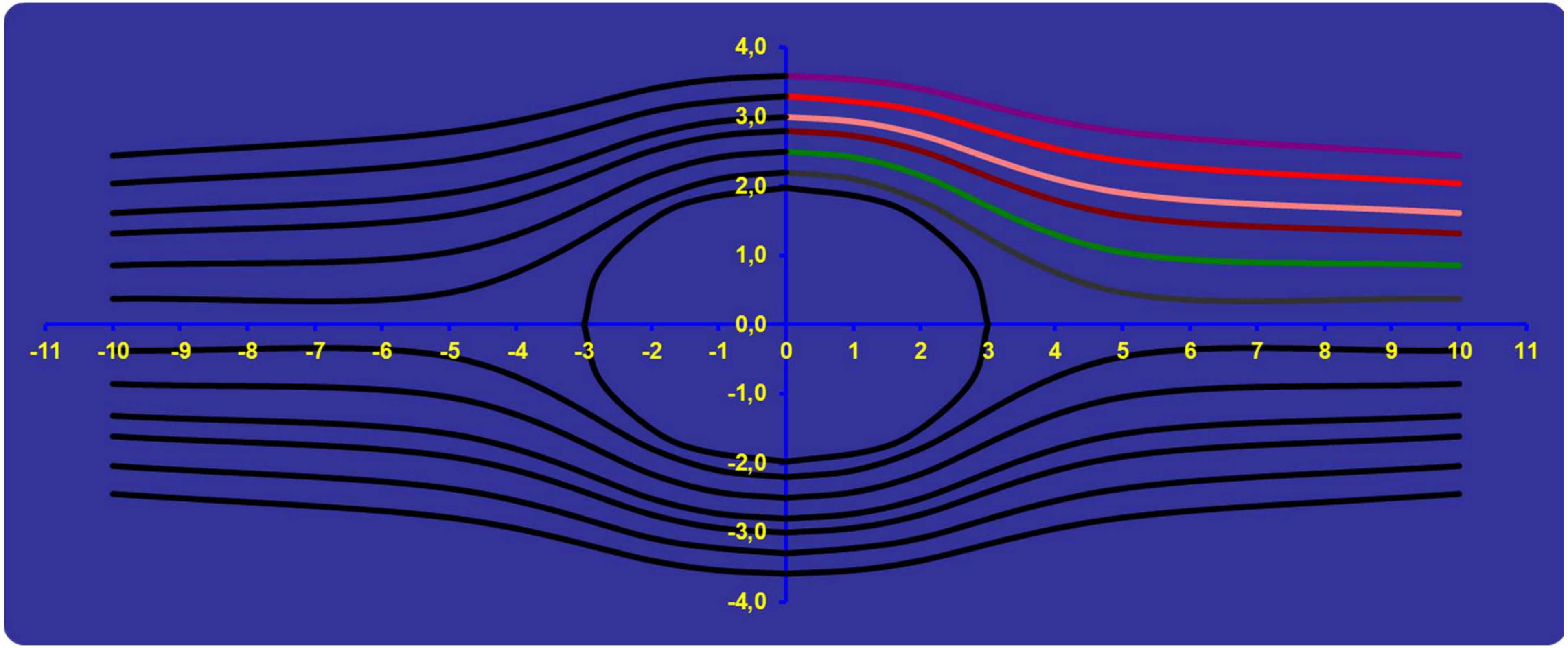
Se combina el campo fluido de una fuente y un sumidero de la misma intensidad con un flujo rectilíneo uniforme. Dados U= 0.80,q=2 Pi, a=2, dibujar el campo fluido.

U =	0,8	Velocidad del flujo. Corriente rectilínea y uniforme.
q =	2 pi	Caudal. Intensidad de la fuente.
a =	2	2a: distancia entre la fuente y el sumidero.

$$\Psi = U\ y + q\ \theta_1 / 2\pi - q\ \theta_2 / 2\pi$$

$$\psi = 0.80\ y + \operatorname{arctg}(y / x+2) - \operatorname{arctg}(y / x-2)$$

En coordendas cartesianas



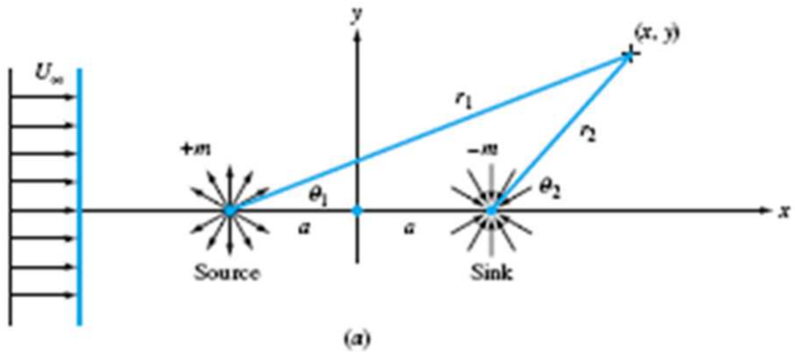
The Rankine Oval

A cylindrical shape called a *Rankine oval*, which is long compared with its height, is formed by a source-sink pair aligned parallel to a uniform stream, as in Fig. 8.9*a*.

From Eqs. (8.12*a*) and (4.133) the combined stream function is

$$\psi = U_\infty y - m \tan^{-1} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} = U_\infty r \sin \theta + m(\theta_1 - \theta_2) \qquad (8.29)$$

When streamlines of constant ψ are plotted from Eq. (8.29), an oval body shape appears, as in Fig. (8.9*b*). The half-length L and half-height h of the oval depend upon the relative strength of source and stream, i.e., the ratio $m/(U_\infty a)$, which equals 1.0 in Fig. 8.9*b*. The circulating streamlines inside the oval are uninteresting and not usually shown. The oval is the line $\psi = 0$.



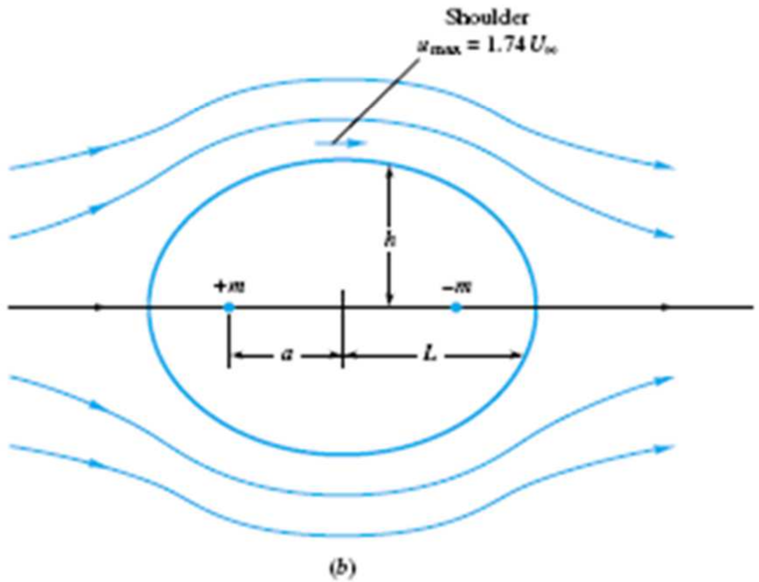


Fig. 8.9 Flow past a Rankine oval: (*a*) uniform stream plus a source-sink pair; (*b*) oval shape and streamlines for $m/(U_\infty a) = 1.0$.

Para Ψ=0 la línea se llama **línea de corriente divisoria**

Para otros valores de Ψ tendremos otras líneas de corriente

La función potencial y de corriente de la red de flujo uniforme alrededor de un cilindro circular de radio **a** será, sustituyendo k en función de **a**:

$$k = U r^2$$

$$\varphi = U(r + a^2/r) \cos\Theta$$

$$\psi = U(r - a^2/r) \operatorname{sen}\Theta$$

La velocidad en cualquier punto puede obtenerse a partir de la función de corriente:

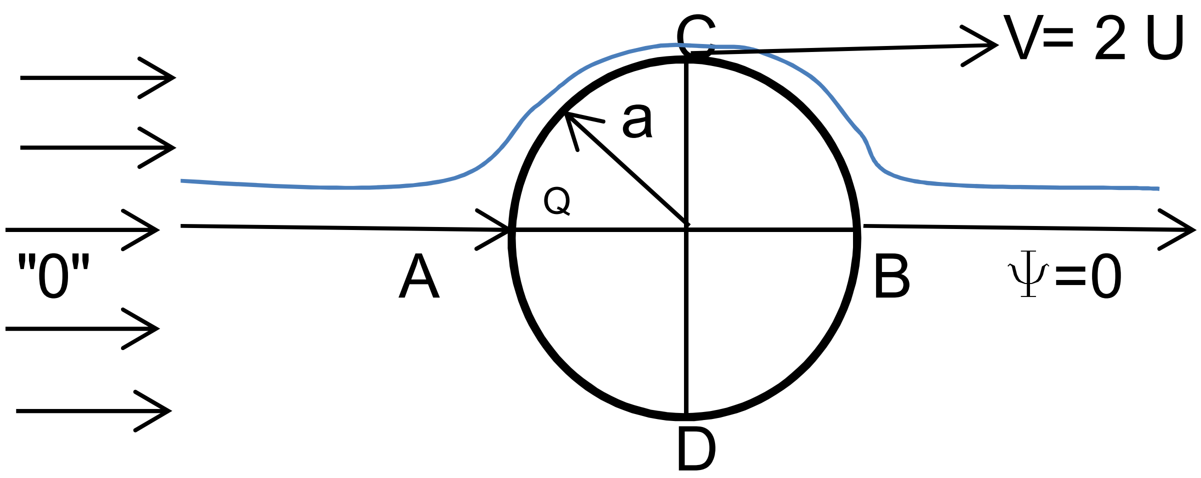
$$V = \delta\Psi / \delta r = \operatorname{sen}\Theta \ (U + k/r^2)$$

$k = U a^2$

$V = \mathrm{sen}\Theta \, (U + U a^2/r^2)$

Si r=a:

$$\boxed{V = 2\,U\,\mathrm{sen}\Theta}$$



Para los puntos A y B, Θ vale cero y π

Para los puntos C y D Θ vale $\pi/2$ y $3/2\ \pi$

El cilindro está quieto, no hay fuerza de sustentación ni de arrastre

Aplicando Bernoulli entre O y A:

$$Po/\gamma + Vo^2/2g = P/\gamma + V^2/2g$$

$$\Delta P = \rho/2\,(Vo^2 - V^2)$$

Reemplazando V:

$$\Delta P = \rho/2\,(Vo^2 - 4\,Vo^2\,\mathrm{sen}^2\Theta)$$

$$\Delta P = \rho\,Vo^2/2\,(1 - 4\,\mathrm{sen}^2\Theta)$$

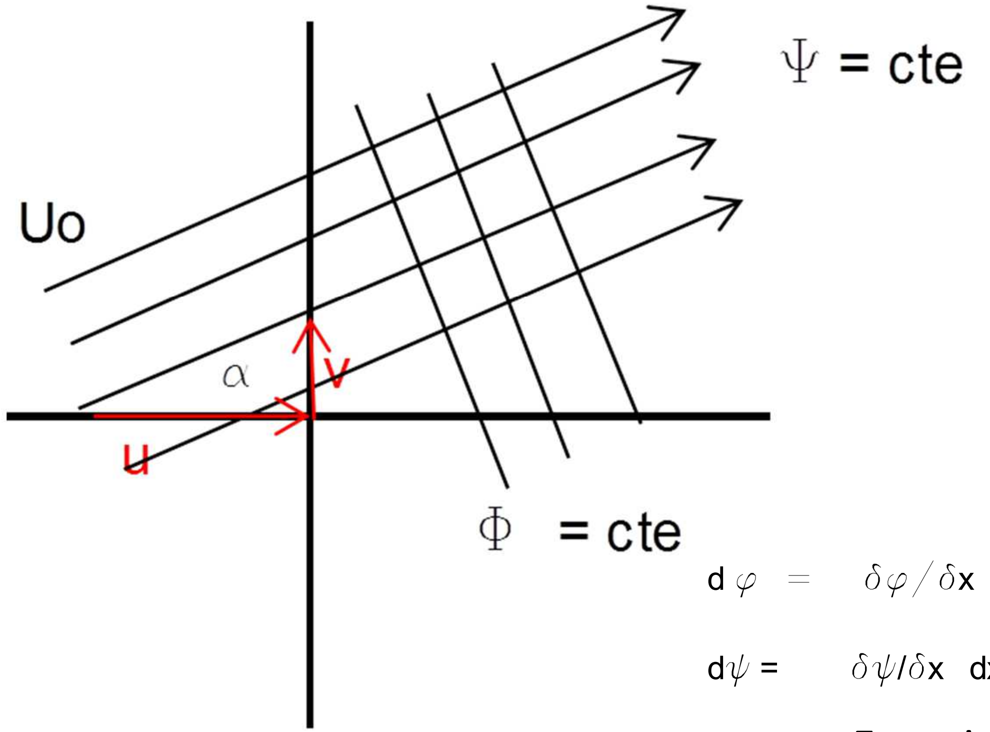
Para C y D :

$\Delta P = -3/2 \;\; \rho \, Vo^2$ depresión

Para A y B :

$\Delta P = \rho \, Vo^2/2$ sobrepresión

MOVIMIENTO UNIFORME



$d\varphi = \delta\varphi/\delta x \; dx + \delta\varphi/\delta y \; dy + \delta\varphi/\delta z \; dz$

$d\psi = \delta\psi/\delta x \; dx + \delta\psi/\delta y \; dy + \delta\psi/\delta z \; dz$

Ecuaciones de Cauchy -Rieman

$u = Uo \cos\alpha = \delta\Phi/\delta x = \delta\Psi/\delta y$ integro respecto de x

$v = Uo \operatorname{sen}\alpha = \delta\Phi/\delta y = -\delta\Psi/\delta x$ integro respecto de y

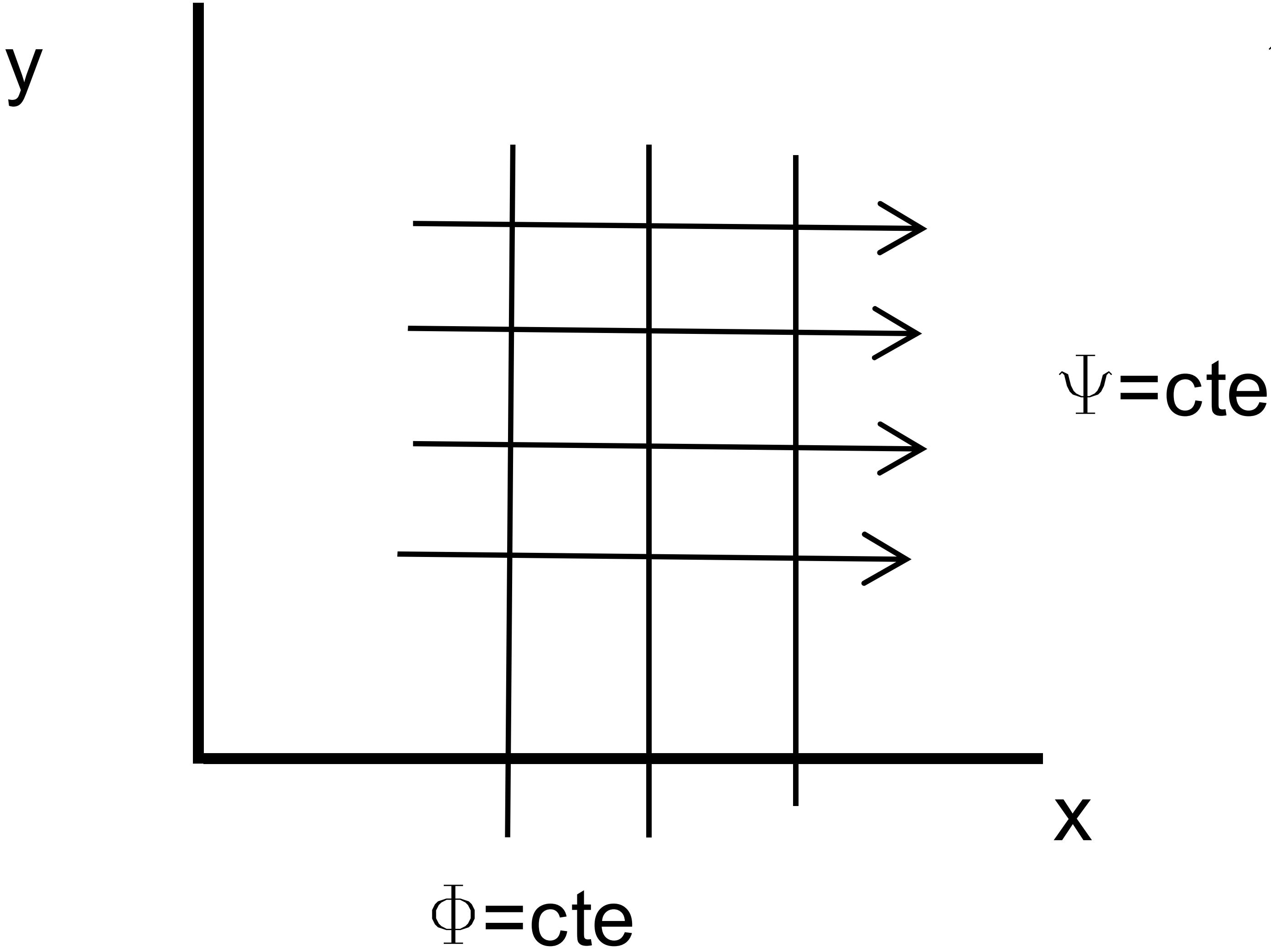
$$\Phi = Uo\,(x \cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha)$$

$$\Psi = Uo\,(y \cos\alpha - x \operatorname{sen}\alpha)$$

Caso particular de α=o :

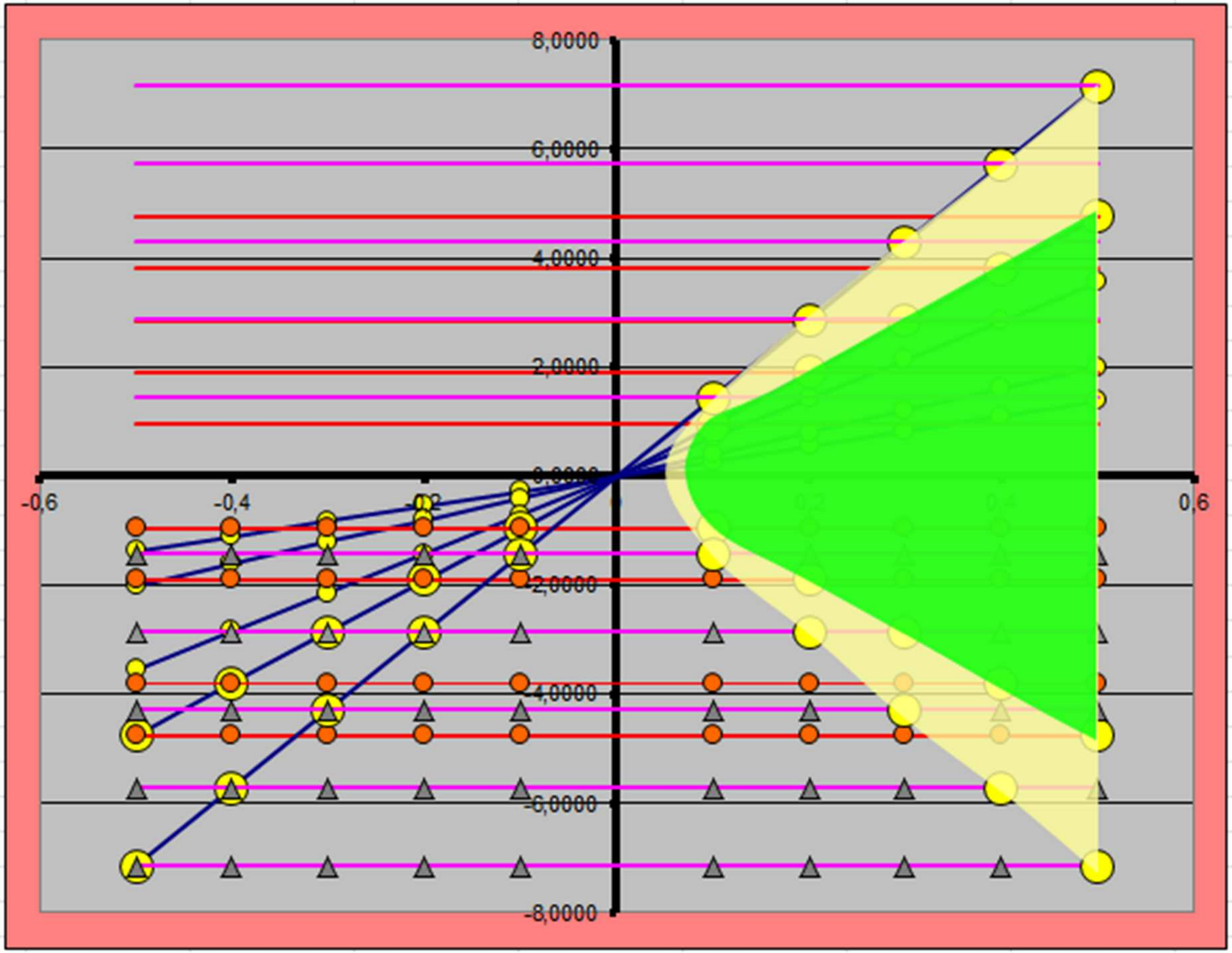
Φ= Uo x

Ψ = Uo y

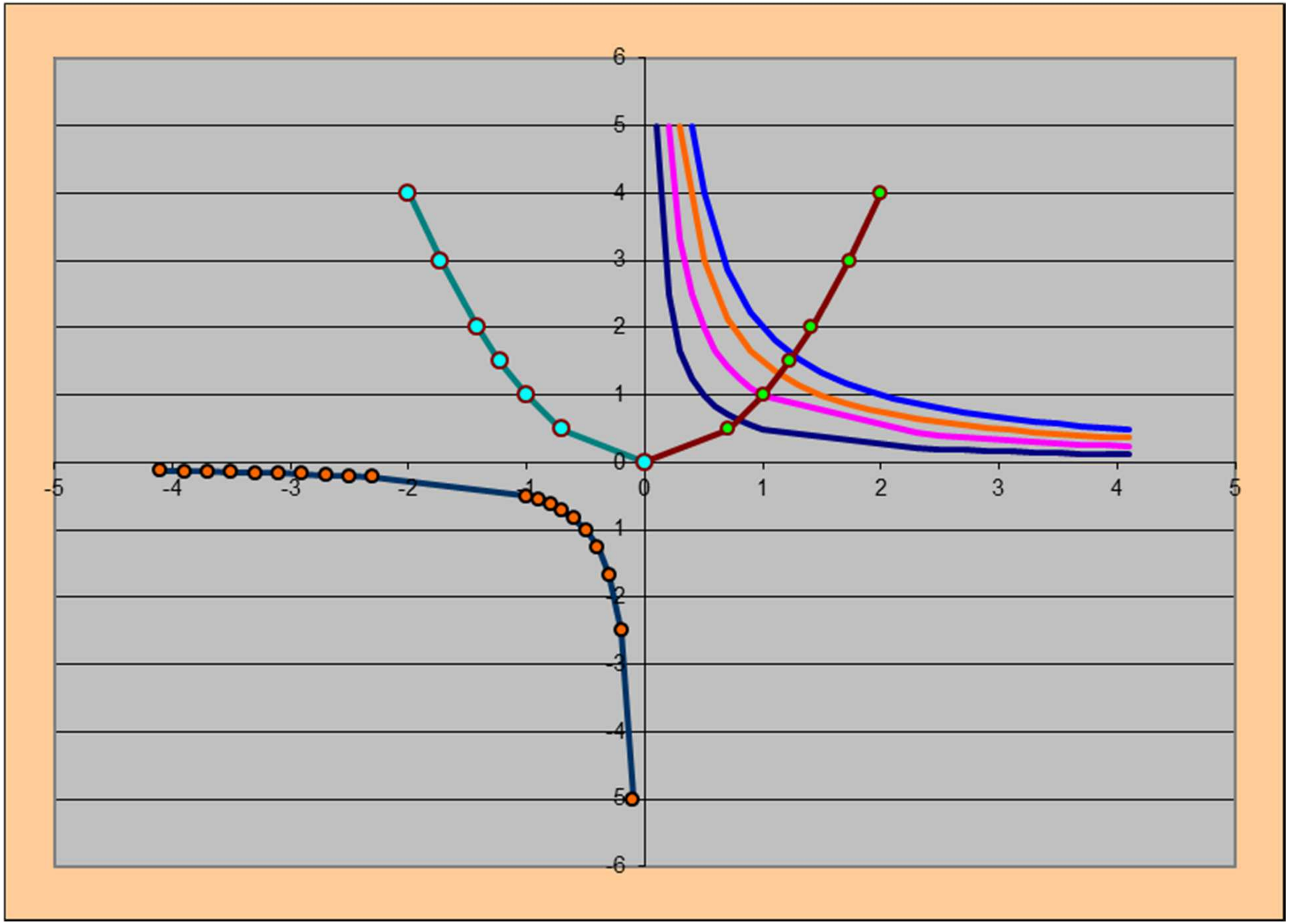


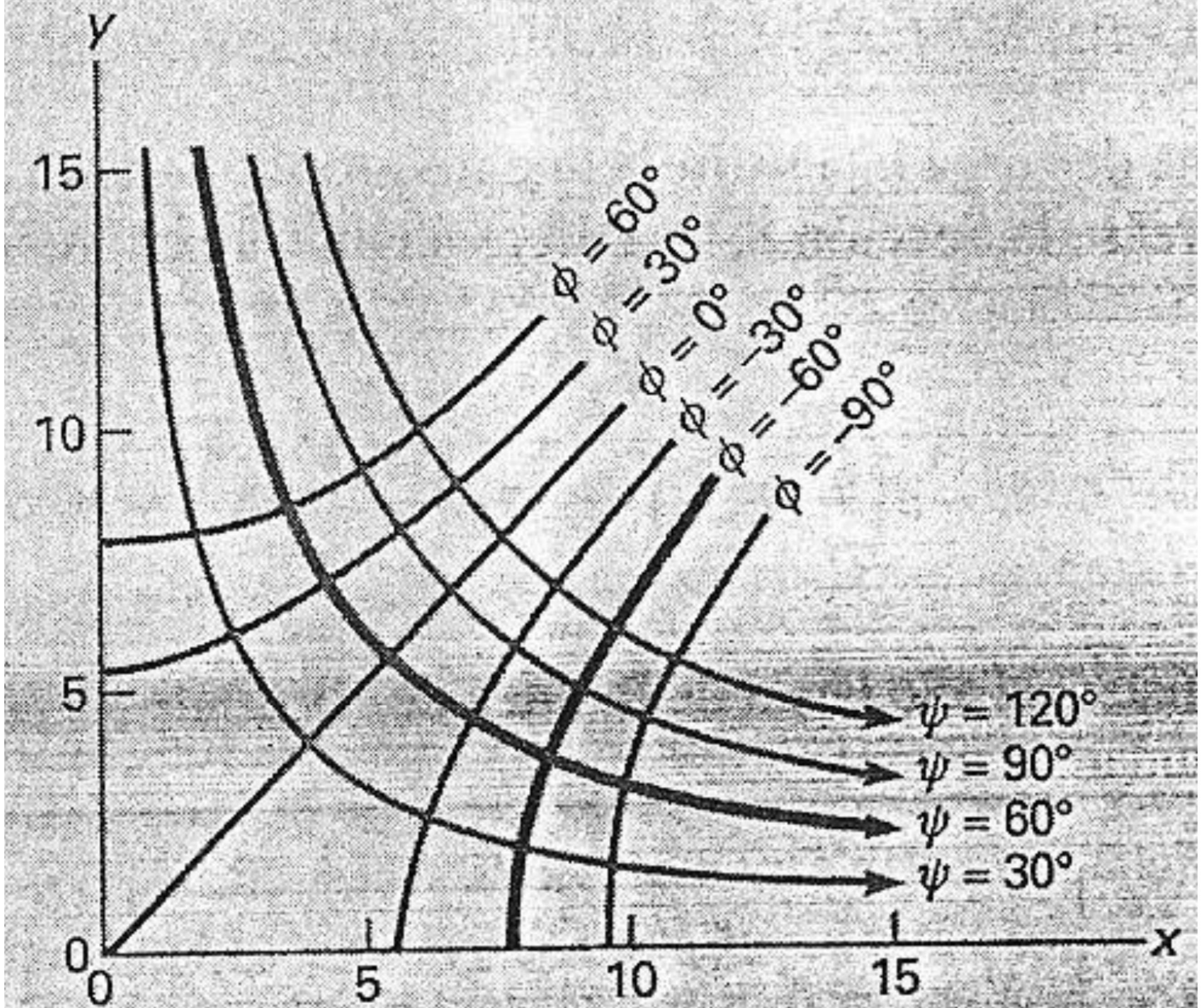
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
φ
φ
ψ
ψ
φ
ψ

COMBINACIÓN DE UNA CORRIENTE UNIFORME Y UNA FUENTE



RED DE CORRIENTE DE UN CODO A 90° (Hipérbolas equiláteras)

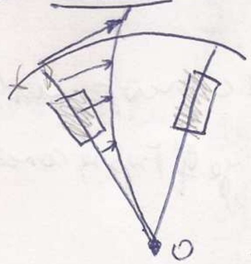




Red de flujo

Lunes 20 de Septiembre de Pascó

MoV Circulares

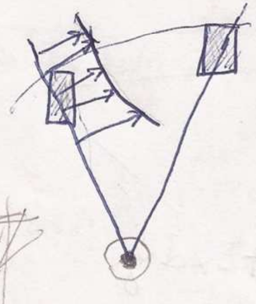


$V = \omega \cdot r$ – Rotó y no se deformó – Vórtice forzado

$\boxed{Y = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + C \quad \text{Parábola}}$

Rotacional → Vórtice Forzado → Parábola

$V = \frac{2\pi n}{60} \cdot r = \frac{\pi n D}{60}$



$V \cdot r = K \Rightarrow$ Droll cte $\Rightarrow V \propto \frac{K}{r}$

$\boxed{Y = \frac{-K^2}{2 g r^2} + C \quad \text{Hipérbola}}$

Partícula paralela a sí misma

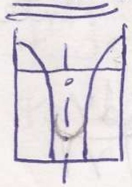
Irrotacional –

$V \cdot r = cte$ El centro rota xq sino $V = \infty$

La mayor r, menor V_o –

Irrot → Vórtice libre → hipérbola.

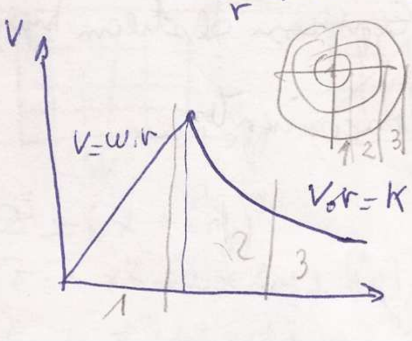
V Libre



Cumple $V \cdot r = cte$

$Y = -\frac{K^2}{2 g r^2} + C$ Hipérbola

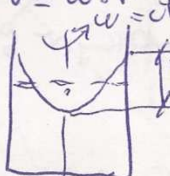
$V = \frac{K}{r} \rightarrow$ Si $r = 0 \Rightarrow V = \infty$



V Forzado

: El se comporte c/ sólido

$V = \omega \cdot r$



$Y = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + C$