



TEORÍA DE MECÁNICA DE LOS FLUIDOS
APUNTES

Material de consulta y apoyo a la base bibliográfica indicada por la cátedra de Mecánica de los fluidos, Facultad de Ingeniería, UNCuyo.

Contenido

Tema 1 – Propiedades de los fluidos.....	10
Definición de mecánica de los fluidos:.....	10
Características físicas del estado fluido:	10
Ley de la viscosidad de Newton:	11
Fluidos Newtonianos y No Newtonianos:	12
Viscosidad:.....	12
- Viscosidad absoluta (μ),	12
- Viscosidad cinemática, ν :	13
Densidad y volumen específico:.....	13
Peso específico y densidad relativa:	14
Clasificación de los fluidos:	14
Diferencia entre un fluido ideal y un gas ideal:.....	14
Compresibilidad:	15
Medición de la viscosidad:	17
Tensión superficial:	20
Tema 2 – Estática de los fluidos	22
Presión en un punto:.....	22
Principio de Pascal:.....	22
Principios de la hidrostática:	24
Variación de la presión en fluido incompresible, $\gamma = \text{cte}$:.....	25
Variación de la presión en fluido compresible, γ variable:	26
Variación de la presión en fluido compresible:.....	26
Manómetros:.....	27
Empuje sobre superficies planas:.....	30
Superficies horizontales:	30
Superficies inclinadas:	31
Empuje sobre superficies curvas:.....	33
Flotabilidad y equilibrio de cuerpos flotantes:	34
Equilibrio Relativo:	35

Aceleración Lineal Uniforme:	35
Rotación uniforme alrededor de un eje vertical – Vórtice forzado:	37
Tema 3 – Cinemática de los fluidos.....	42
Enfoque Lagrangiano.....	42
Enfoque Euleriano	42
Clasificación de los movimientos:	43
Movimiento permanente	43
Movimiento uniforme	43
Movimiento rotacional.....	43
Movimiento laminar y turbulento:.....	44
Ecuación de continuidad para fluidos incompresibles y compresibles:.....	46
Aceleración:.....	49
Relación entre el gradiente de presiones y la aceleración:	50
Función potencial:.....	51
Función de corriente:	52
Ecuación de Laplace:	53
Estudios de movimientos mediante fuentes y sumideros:.....	54
Vórtice libre:.....	55
Doblete, flujo alrededor de un cilindro de sección circular:	56
Tema 4 – Dinámica de los fluidos.....	62
Ecuación general de conservación en un volumen de control:	62
Ecuación general de transporte de Reynolds:	63
Ecuación de Euler:	64
Ecuación de Bernoulli:.....	65
Ecuación de energía:	67
Ecuación de la cantidad de movimiento:.....	69
Aplicación: Calculo del soporte de un codo de cañería:	70
Aplicación de Bernoulli.....	71
Orificio de un embalse (ecuación de Torricelli):	71
Medición de velocidad (tubo de Pitot y Tubo de Prandtl)	72

Medición de caudal (Tubo de Venturi, Tobera y placa orificio)	74
Tema 5 – Influencia de la viscosidad	80
Número de Reynolds:.....	80
Deducción de la ecuación de Hagen-Poiseuille:.....	81
Ecuación de Hagen Poiseuille – Análisis únicamente horizontal:	82
Experiencia de Reynolds – Inestabilidad del Régimen Laminar	83
Viscosidad de remolino – Régimen turbulento.....	84
Teoría de la capa límite – Resistencia Superficial	85
Descripción de la capa límite	85
Ecuación de momentum aplicada a la capa límite ‘ Flujo Permanente:	86
Capa límite laminar:	87
Capa límite turbulenta:	88
Resistencia de forma y resistencia de superficie.	90
Tema 6 – Flujo en conductos cerrados	94
Pérdida de carga en tuberías:	94
Formula de Darcy-Weisbach	94
Diagrama de Moody:.....	96
Rugosidad:.....	98
Radio hidráulico (Rh):.....	99
Pérdidas secundarias – Longitud equivalente:.....	100
Expansión Súbita:	100
Contracción súbita:	101
Sistemas de tuberías (Serie-Paralelo-Ramificado)	102
Cavitación	105
Tema 7 – Análisis Dimensional y Semejanza Dinámica	108
Teorema de Buckingham:	108
Teoría de Modelos – Semejanza Hidráulica:	109
Número de Euler	110
Número de Reynolds:.....	110
Número de Froude	110

Número de Weber	110
Número de Mach	111
Ecuación de Bertrand:	111
Tema 8 – Flujo compresible	114
Propagación de ondas elásticas:	114
Golpe de ariete:.....	114
Descripción de la secuencia de eventos, luego del cierre súbito de la válvula:.....	115
Efectos de la compresibilidad – Perdida de carga en tuberías:	117
Características del flujo subsónico-sónico-supersónico:	119
Flujo isoentrópico a través de toberas.....	120
Flujo isotérmico.....	122
Tema 9 – Bombas centrifugas	124
Elementos componentes:	124
Ecuación de Euler:	126
Segunda forma de la ecuación de Euler (Triángulo de velocidades):	127
Aplicación del teorema de Bernoulli a la ecuación de Euler	128
Influencia de los ángulos y del número de alabes:	129
Voluta difusora:.....	130
Cono difusor:.....	131
Leyes de semejanza:.....	131
NSQ – número específico de vueltas:	132
Rodetes:	133
Golpe de ariete y cavitación en la bomba – Máxima altura de aspiración Hs:	134
Aspiración NPSH o ANPA.....	135
Curvas características:.....	136
Curva real, Cabeza H – Caudal Q:.....	137
Tema 10 – Flujo sobre cuerpo sumergidos	140
Distribución de velocidades alrededor de un cilindro circular:	140
Combinación de efectos:.....	142
Caso general – Ecuación de Kutta-Jukowsky:.....	143

Efecto Magnus – Empuje Ascensional:	144
Coeficiente de resistencia (C_D) y coeficiente de sustentación (C_L):.....	145
Perfil alar:	146
Curva polar de un perfil alar:.....	148
Dispositivos hipersustentadores:	149
Dispositivos hiposustentadores:	149
Resistencia a la velocidad sónica y supersónica. Ondas de choque. Temperatura y presión en los puntos de estancamiento a velocidad supersónica:	150
Ley de Stokes. Velocidad de sedimentación:	151

PROPIEDADES DE LOS FLUIDOS

TEMA 1

Tema 1 – Propiedades de los fluidos

Definición de mecánica de los fluidos:

La ciencia de la ingeniería de mecánica de fluidos se ha desarrollado gracias al entendimiento de las propiedades de los fluidos, a la aplicación de las leyes básicas de la mecánica y la termodinámica, y una base experimental. Sabemos que la mecánica es la ciencia que estudia los problemas de movimiento o desequilibrio de cuerpos materiales, y sus interacciones mutuas. La mecánica se divide en tres ramas:

- Estática: estudia las leyes de composición de fuerzas y el equilibrio.
- Cinemática: trata las propiedades geométricas del movimiento de cuerpos.
- Dinámica: estudia las leyes del movimiento bajo la acción de fuerzas.

La mecánica teórica se divide en:

- Mecánica de partículas y sistemas de partículas
- Mecánica del cuerpo rígido
- Mecánica del cuerpo de masa variable
- Mecánica de cuerpos deformables
- Mecánica de los fluidos

Campo de aplicación: aeronáutica, automovilismo, conducción de fluidos por redes de tuberías, canales, etc.

Características físicas del estado fluido:

Continuo: es un medio hipotético que reemplaza la estructura molecular real de un fluido, de tamaño grande respecto de la distancia intermolecular.

Fluido: es una sustancia que se deforma continuamente cuando se somete a esfuerzos cortantes, sin importar que tan pequeños sean. Sabemos que un esfuerzo es la fuerza por unidad de área, y el esfuerzo de corte es la fuerza paralela a una superficie, distribuida en toda la superficie, dividido por dicha área:

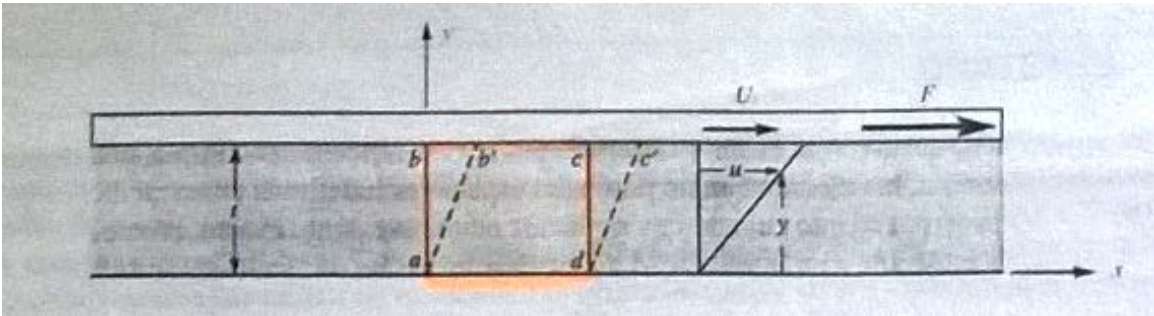
$$\tau = \frac{F_{\parallel}}{A}$$

Características de un fluido:

- Puede fluir
- Cambia de forma
- No resiste fuerzas tangenciales
- Puede ser líquido o gas

Ley de la viscosidad de Newton:

Consideramos ahora una sustancia fluida entre dos placas paralelas muy cercanas y grandes (no hay efecto de borde), una fija y otra móvil a la cual se le aplica una fuerza tangencial a la superficie, por tanto hay un esfuerzo de corte. Si la sustancia es un fluido la placa se moverá con cierta velocidad permanente. El fluido en inmediato contacto con la pared sólida tiene idéntica velocidad (por lo tanto no hay deslizamiento).



El fluido en el área "abcd" fluye al área "ab'c'd" cada una de las partículas del fluido se mueve paralelamente a la placa y la velocidad u varía uniformemente desde $u=0$ (placa fija) hasta $u=U$ en la placa superior. La experimentación demuestra que la fuerza tangencial F es directamente proporcional a la velocidad y al área, e inversamente proporcional t (espacio de separación entre placas), entonces:

$$F = \mu A \frac{U}{t}$$

Donde μ es la viscosidad dinámica o absoluta, y es la constante, distinta para cada fluido. Además

$$\tau = \frac{F}{A} \text{ entonces } \tau = \mu \frac{U}{t}$$

Siendo U/t la velocidad angular de la línea "ab" o tasa de deformación angular del fluido.

Por último en forma diferencial: $\tau = \mu \frac{du}{dy}$ ecuación que se conoce como "Ley de viscosidad de Newton" siendo du/dy el gradiente de velocidad (relación entre velocidad de una capa y la velocidad de una capa adyacente).

Fluidos Newtonianos y No Newtonianos:

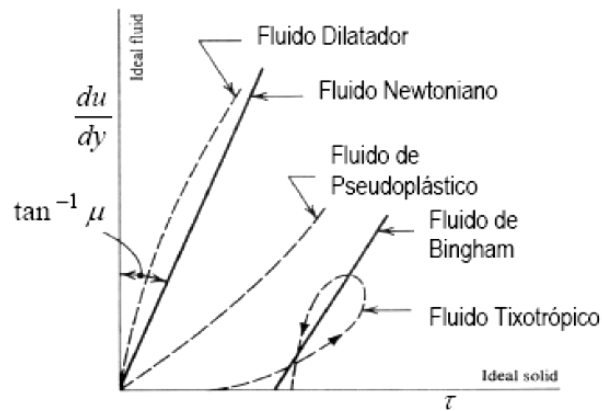
Los primeros son lo que cumplen la ley de viscosidad de Newton por lo tanto presentan una relación lineal entre el esfuerzo de corte aplicado y la correspondiente velocidad de deformación resultante (los gases y líquidos mas comunes tienden a ser fluidos newtonianos, por ejemplo el aire, el agua y el aceite).

Los fluidos no newtonianos no presentan relación lineal entre el esfuerzo de corte y la tasa de deformación. Ciertos gases en su punto crítico y líquidos pesados se comportan como no newtonianos. Una sustancia tixotrópica (tintas) tiene una viscosidad dependiente de la tasa de deformación angular.

Diagrama Reologico o Reograma:

Ley de Newton

$$\tau_{xy} = \mu \cdot \frac{du}{dy}$$



Fluido ideal, es un fluido incompresible ($\rho = \text{cte}$) y no viscoso ($\mu = 0$), por lo tanto el esfuerzo de corte $\tau = 0$, sin importar el movimiento del fluido.

Viscosidad:

- Viscosidad absoluta (μ),

es aquella propiedad del fluido mediante la cual este ofrece resistencia al esfuerzo de corte (para una tasa de deformación dada, si aumenta μ , entonces τ debe ser mayor), por ejemplo la brea es un fluido altamente viscoso y el agua no. Para líquidos si aumenta la temperatura, disminuye μ , y para un gas si aumenta la temperatura por el contrario aumenta μ . Esto es pues la resistencia al corte de un fluido depende de su cohesión y de la tasa de transferencia de momentum molecular.

Líquido: tiene muchas moléculas (mas que un gas) por lo que las fuerzas de cohesión son mayores y como la cohesión disminuye con la temperatura, entonces disminuye μ cuando aumenta T.

Gas: tiene muy baja cohesión por lo tanto la resistencia al corte se debe a la tasa de momentum molecular. Como los movimientos moleculares aumentan con la temperatura, entonces aumenta la cantidad de movimiento, aumenta μ con el aumento de T.

Para presiones ordinarias, μ solo varia con T, para grandes presiones $\mu = f(P, T)$.

Estática de los fluidos: un fluido en reposo (o en movimiento de manera que no existe movimiento relativo de una capa respecto a la capa adyacente), no habrá esfuerzos de corte aparentes y no tendrá viscosidad, pues obviamente no hay gradiente de velocidad en la dirección y ($du/dy=0$). Por lo tanto como no hay esfuerzos tangenciales solo actúan en la superficie esfuerzos normales (presión).

$$[\mu] = \text{Pa}\cdot\text{s} = \text{kg}/\text{m}\cdot\text{s} \quad ; \quad \text{Poise: } 1000 \text{ cP} = 1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

Glicerina:	$\mu = 1,5 \text{ Pa}\cdot\text{s}$
Aceite SAE 30:	$\mu = 0,26 \text{ Pa}\cdot\text{s}$
Agua:	$\mu = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$
Aire:	$\mu = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$

- Viscosidad cinemática, ν :
muy utilizada en la técnica, es la relación entre la viscosidad absoluta y la densidad:

$$\boxed{\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}}{\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}}$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

$$1 \frac{\text{m}^2}{\text{s}} = 10^4 \text{ stoke (st)} = 10^6 \text{ centistokes (Cst)}$$

$$1 \frac{\text{m}^2}{\text{s}} = 929 \frac{\text{pu lg}^2}{\text{seg}}$$

Densidad y volumen específico:

La densidad de un fluido se define como su masa por unidad de volumen, la densidad en un punto será la masa de su volumen cuando en el límite este dV tienda a cero. $\rho = \frac{dm}{dV}$

El volumen específico es el inverso de la densidad $\bar{v} = \frac{1}{\rho}$

La densidad varía muy poco con la temperatura y la presión en líquidos, no así en gases que son muy sensibles a cambios de P-T.

Peso específico y densidad relativa:

El peso específico de un fluido se define como su peso por unidad de volumen. Este cambia con la localización ya que depende de la gravedad. Por lo tanto $\gamma = \rho g$

$$\gamma = \frac{dG}{dV} = \frac{dm g}{dV} = \rho g$$

La densidad relativa de una sustancia es la relación entre su peso específico (o densidad), el peso específico de un volumen igual de agua (o densidad del agua) en condiciones estándar.

$$S = \rho_r = \gamma_r$$

Clasificación de los fluidos:

Líquidos: no pueden soportar esfuerzos de tracción por que se vaporizarían. Con frecuencia los líquidos puede soportar una fuerza de compresión considerable con un pequeño o ningún cambio observable de su densidad. No existen relaciones universales entre la P y ρ , para líquidos.

Gases: los gases responden a cambios en la presión. Existe una relación universal entre la P y la ρ :

$$P \bar{v} = \bar{R} T \quad \text{Ecuación de estado}$$

$$P V = n \bar{R} T \quad y \quad P \frac{V}{m} = \frac{\bar{R}}{M} T$$

siendo $\bar{R} = R M$ la Constante Universal de los Gases ($8312 \frac{J}{kg^\circ K}$ o $0,082 \frac{l atm}{^\circ K mol}$)

$$P V = R T \quad o \quad P = \rho R T \quad (\text{Gases Ideales})$$

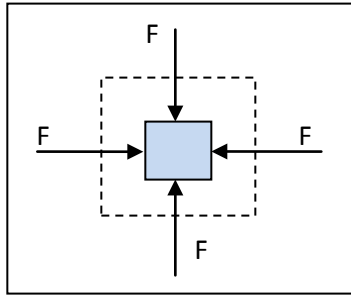
$$o \text{ agregando el factor de compresibilidad } Z \quad P V = Z R T \quad (\text{Gases Reales})$$

Los gases reales por debajo de la presión crítica y por encima de la temperatura crítica tienden a obedecer la ley del gas perfecto, la cual incluye la ley de Boyle ($P V = cte$, para $T=cte$), incluye la ley de Charles Gay Lussac ($P=cte$ entonces aumenta V linealmente con T. Si $v = cte$ P aumenta linealmente con T), incluye la hipótesis de Avogadro ($1 \text{ mol} = 6,022 \cdot 10^{23}$ partículas).

Diferencia entre un fluido ideal y un gas ideal:

El fluido ideal no tiene fricción y es incompresible; un gas ideal tiene viscosidad entonces desarrolla esfuerzos de corte. Además es compresible según la ecuación de estado.

Compresibilidad:



Imaginemos un pequeño cubo sumergido en el seno de un líquido en equilibrio. Vemos que el efecto de las fuerzas perpendiculares que originan iguales presiones producen una disminución del volumen pero manteniendo la forma. Si V_f es el volumen final y V_o el volumen inicial entonces $\Delta V = V_f - V_o$, pero es más común considerar la variación relativa de volumen o deformación $\epsilon = -\Delta V / V_o$, luego consideramos el esfuerzo $\Delta P = F/A$. Finalmente el modulo de elasticidad volumétrico será $k = \Delta P / \epsilon$ o sea que:

$$K = - \frac{\Delta P}{\frac{\Delta V}{V_o}}$$

El reciproco de K es el coeficiente de compresibilidad.

$$C = \frac{1}{K} = - \frac{\frac{\Delta V}{V_o}}{\Delta P}$$

A medida que el líquido se comprime, su resistencia a la compresión adicional se incrementa.

Transformación isotérmica $P_f V_f = P_i V_i = cte$

Transformación adiabática $P_f V_f^k = P_i V_i^k = cte$

La compresibilidad de un gas perfecto se describe mediante la ley de los gases. En general:

$P V^n = cte$, si $n=1$ la transformación es isotérmica y si $n=k=c_p/c_v$ entonces la transformación es adiabática.

Derivamos:

$$d(P V^n) = d cte = 0$$

$$P d(V^n) + V^n dP = 0$$

$$P n V^{n-1} dV + V^n dP = 0$$

$$dP = - P n \frac{V^{n-1}}{V^n} dV$$

$$n P = - \frac{dP}{\frac{dV}{V}} = K$$

Vemos entonces que si la transformación es isotérmica entonces $K=P$ y si la transformación es adiabática $K=kP$

Para la mayoría de los propósitos un líquido puede considerarse como incompresible pero para aquellas situaciones que involucren cambios súbitos o grandes de presión, la compresibilidad se vuelve importante. En líquidos y gases $K=f(T)$.

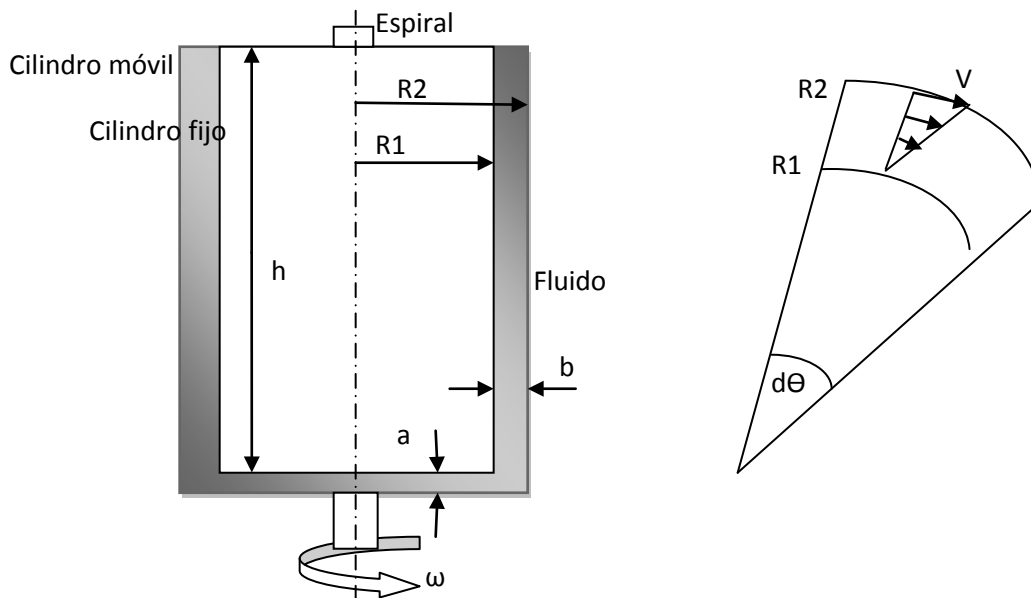
Medición de la viscosidad:

La viscosidad puede medirse de tres formas (entre otras):

- 1- Mediante la ley de la viscosidad de Newton
- 2- Mediante la ecuación de Hagen-Poiseuille
- 3- Mediante métodos que requieren calibración con fluidos de viscosidad conocida

Viscosímetros rotacionales: recordamos la ley de Newton $\tau = \mu \, du/dy$ por lo tanto para determinar μ debemos obtener τ y du/dy (esfuerzo de corte y gradiente de velocidad). Utilizamos el viscosímetro Stormer, de cilindros concéntricos: por medio de uno de los cilindros que gira con velocidad conocida con respecto al otro cilindro de referencia en reposo se determina du/dy . Luego midiendo el torque sobre el cilindro en reposo, se puede calcular el esfuerzo de corte, τ . Entonces:

$$\frac{du}{dy} = \frac{2\pi r_2 N}{60 b} \quad \text{siend } b \ll r_2, \quad \tau = \frac{T_c}{\pi r_1^2 h} \quad \text{entonces } \mu = \frac{15 T_c b}{\pi^2 r_1^2 r_2 h N}$$



Condición: flujo laminar, temperatura constante y velocidad angular regulada.

Imaginemos un líquido que llena el espacio entre dos cilindros coaxiales, las capas cercanas al cilindro móvil se adelantarán respecto a sus adyacentes hacia el cilindro fijo, como b es muy pequeño se puede considerar velocidad casi constante.

Si no despreciamos el fluido debajo del fondo del cilindro fijo, hay que recalculer el torque:

$$\partial T = r \tau \partial A = r \mu \frac{\partial u}{\partial y} r \partial r \partial \theta = r \mu \frac{\omega r}{a} r \partial r \partial \theta$$

$$T_{\text{disco}} = \frac{\mu}{a} \frac{2\pi N}{60} \int_0^{r_1} \int_0^{2\pi} r^3 \partial r \partial \theta = \frac{\mu}{a} \frac{\pi^2 N}{60} r_1^4$$

Finalmente el torque total será: $T = T_{\text{disco}} + T_{\text{cilindro fijo}}$

$$T = \frac{\mu}{a} \frac{\pi^2 N}{60} r_1^4 + \frac{\mu \pi^2 r_1^2 r_2 h N}{15 b} = \frac{\mu \pi^2 r_1^2 N}{15} \left(\frac{r_1^2}{4a} + \frac{r_2 h}{b} \right)$$

Hagen-Poiseuille:

Viscosímetros Engler, Reedwood y Saybolt: dan la velocidad media de un fluido en flujo laminar que circula por una cañería.

$$\Delta P = \frac{v_m 32 \mu L}{D^2} \quad \text{o} \quad v_m = \frac{\Delta P D^2}{32 \mu L} = \frac{\Delta P r^2}{8 \mu L} \quad \text{y} \quad Q = v_m A = \frac{V}{t} \quad \text{entonces} \quad Q = \frac{\Delta P \pi r^4}{8 \mu L}$$

$$\text{Finalmente} \quad \mu = \frac{\Delta P \pi r^4}{8 V L} t \quad \text{es decir que} \quad \mu = \text{cte} \cdot \text{tiempo}$$

Por eso se mide el tiempo de escurrimiento.

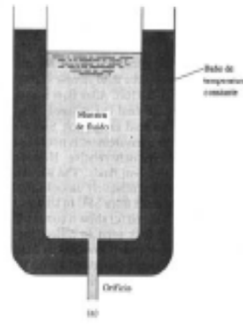
- Viscosímetro Engler:

$$\mu = \frac{\text{tiempo de escurrimiento } 200 \text{ cm}^3 \text{ de fluido}}{\text{tiempo de escurrimiento } 200 \text{ cm}^3 \text{ de agua destilada}} \quad \text{a } 20^\circ\text{C}$$



- Viscosímetro Saybolt:

Este no hace referencia al agua, sino directamente se mide el tiempo en segundos que tarda en escurrir 60 cm³ de fluido. Hay dos tipos SSU y SSF, que se distinguen de acuerdo al diámetro del orificio de descarga del tubo capilar:



Viscosimetro Saybolt

Tubo capilar:

$\varnothing_{\text{orificio}} = 1,765 \text{ mm}$ -> SSU, se usa en subproductos del petróleo y lubricantes con $32 \text{ SSU} < \text{viscosidad} < 1000 \text{ SSU}$

$\varnothing_{\text{orificio}} = 3,15 \text{ mm}$ -> SSF, se usa en aceites pesados con viscosidad $> 25 \text{ SSF}$

$$v = 0,0022 t - \frac{1,8}{t} \text{ en centistoke}$$

- Viscosímetro Reedwood, escurrimiento de 50 cm³ de fluido
Reedwood N°1 $\varnothing=1,08 \text{ mm}$
Reedwood N°2 $\varnothing=3,8 \text{ mm}$

Viscosímetro Sedimentológico:

Se determina el tiempo de caída o de sedimentación de una esfera pequeña a través de un fluido dentro de un tubo:

Caída de bola
(Ley de Stokes)

$\mu = t(p_b - p_l) K \text{ (cp)}$

Tensión superficial:

En la interfase liquido-gas o liquido-liquido (no miscibles) se forma una película en el líquido debido a la atracción de moléculas de líquido por debajo de la superficie. Esta capa se debe a la existencia de cierta energía superficial (W/A). Entonces la tensión superficial es la fuerza de tensión requerida para formar esa película.

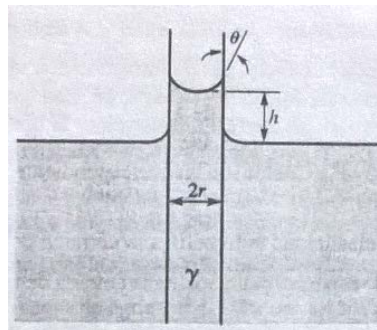
Energía superficial por el área de la película. Por ejemplo agua a 20°C y 1 atm posee una tensión superficial $\sigma = 0,074 \text{ N/m}$ o J/m^2 .

La acción de la tensión superficial es incrementar la presión dentro de una pequeña gota de radio r o dentro de un pequeño chorro de líquido.

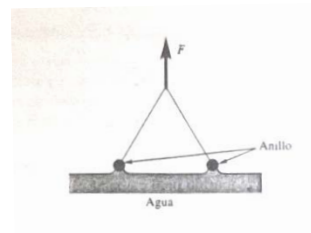
$$P_{int} \pi r^2 = 2 \pi r \sigma \quad \text{entonces} \quad P_{int} = \frac{\sigma}{r}$$

Vemos que la presión interna se incrementa para radios pequeños.

Un líquido que moja un sólido tiene mayor adhesión que cohesión, por lo tanto la acción de la tensión superficial hace que el líquido suba dentro de tubos capilares verticales y parcialmente sumergidos en él. Entonces conocidos el ángulo de contacto entre el líquido y el sólido, y la altura capilar, se determina σ .



Un método para determinar la tensión superficial de un líquido es encontrar la fuerza necesaria para halar un anillo de alambre de platino desde la superficie del líquido.



ESTÁTICA DE LOS FLUIDOS

TEMA 2

Tema 2 – Estática de los fluidos

Presión en un punto:

Es causada por una fuerza normal que empuja contra un plano definido en un fluido, o contra una superficie plana en contacto con un fluido. Para determinar la presión en un punto consideramos el dF que actúa sobre un área elemental dA que en límite tiende a cero. La presión media en cambio se calcula directamente como el cociente entre la fuerza normal que actúa sobre un área plana y dicha área.

$$P = \lim_{A \rightarrow 0} \Delta F_n / \Delta A \quad \text{y} \quad P_m = F/A$$

Un punto de fluido tiene igual presión en todas direcciones.

Fuerza: existen dos tipos en fluidos, las fuerzas de cuerpo que actúan en el paquete a distancia (fuerzas electromagnéticas y gravitacionales) y las fuerzas de superficie que se deben al contacto entre fluidos.

Esfuerzos: existen dos tipos sobre el área: normales ($\sigma_n = \lim_{A \rightarrow 0} \Delta F_n / \Delta A$) y cortantes ($\tau = \lim_{A \rightarrow 0} \Delta F_{\text{sup}} / \Delta A$).

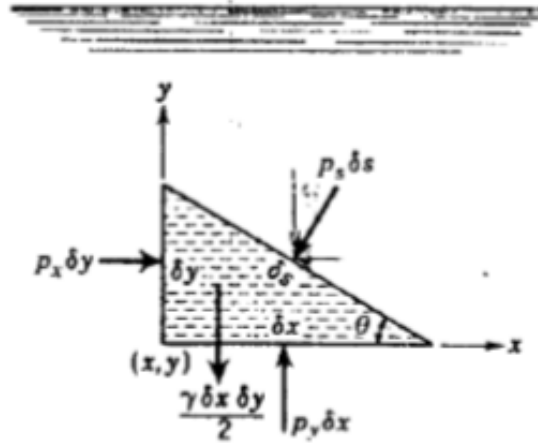
Según el cubo elemental de distribución de esfuerzos, definimos el esfuerzo volumétrico como el promedio de los esfuerzos normales: $P = -\sigma = -1/3 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$. La presión es positiva hacia el centro de la masa de la superficie en la que actúa, a diferencia de los esfuerzos que son positivos hacia afuera.

Principio de Pascal:

En un punto de un fluido en reposo existe la misma presión en todas las direcciones.

La sobrepresión ejercida sobre un punto del fluido en equilibrio se transmite íntegramente y en todas las direcciones a los demás puntos del fluido en equilibrio. Cuando un fluido se encuentra en reposo, no existe movimiento relativo entre capas adyacentes, por lo tanto $du/dy=0$, no hay esfuerzo de corte ni se manifiesta la viscosidad; por lo tanto las fuerzas normales o de presión son las únicas que existen (además del peso $P = m g$).

Demostración del principio:



Consideramos un cuerpo libre en forma de cuña sobre el punto (x,y) de un fluido en reposo. Como no hay τ solo pueden existir presiones (y el peso del área):

$$\sum F_x = 0 = P_x dy - P_s ds \sin \theta$$

$$\sum F_y = 0 = P_y dx - P_s ds \cos \theta - \gamma \frac{dx dy}{2}$$

el último término es infinitesimal, se desprecia

En el límite la cara inclinada tiende al punto (x,y) , entonces:

$$P_x dy - P_s dy = 0 \quad y \quad P_y dx - P_s dx = 0$$

Simplificando, nos queda:

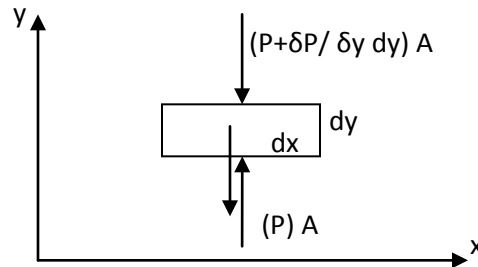
$$P_x = P_y = P_s = P$$

Principios de la hidrostática:

Ecuación fundamental de la hidrostática; las presiones en un plano horizontal en un fluido son las misma $dP/dx=0$

Variación de la presión en fluido estático:

Caso bidimensional:



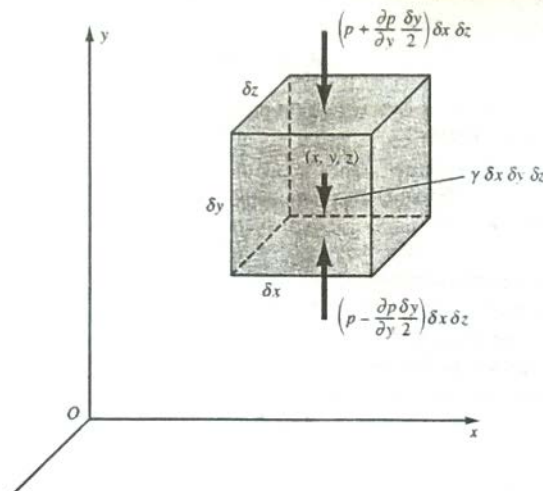
$$\sum F_y = 0 = PA - (P + \frac{\partial P}{\partial y} dy) A - \gamma dy A$$

$$\sum F_y = 0 = -\frac{\partial P}{\partial y} dy A - \gamma dy A$$

$$\gamma = -\frac{dp}{dy}$$

Ecuación valida tanto para fluidos compresibles como incompresibles.

Caso tridimensional:



Hacemos $\sum F_y = 0$

$$dF_y = -\left(P + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{dy}{2}\right) dx dz + \left(P - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{dy}{2}\right) dx dz - \gamma dx dy dz$$

$$dF_y = -\frac{\partial P}{\partial y} dy dx dz - \gamma dx dy dz$$

Lo mismo $\sum F_x = 0$ y $\sum F_z = 0$

$$dF_x = -\frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz \quad y \quad dF_z = -\frac{\partial P}{\partial z} dz dy dx$$

El vector de fuerza elemental

$$dF = \partial F_x \hat{i} + \partial F_y \hat{j} + \partial F_z \hat{k}$$

$$dF = -\left(\frac{\partial P}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \hat{k}\right) dx dy dz - \gamma dx dy dz \hat{j} = 0$$

Entonces: $-\nabla P - \mathbf{j}\gamma = \mathbf{0}$ que en la componente y : $\gamma = -\frac{dP}{dy}$

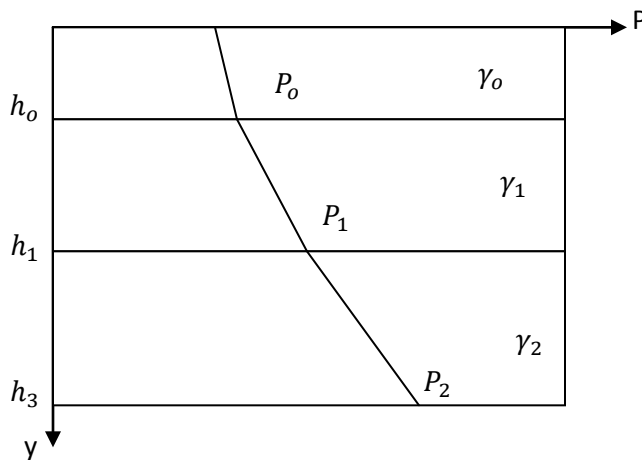
Variación de la presión en fluido incompresible, $\gamma = cte$:

$$\text{Integramos } \int_0^P dP = -\int_0^y \gamma dy$$

Da como resultado $P = -\gamma y + cte$ para $h=0$ $cte = P_0$

Y considerando el eje "y" dirigido hacia abajo nos queda, $P_{abs} = \gamma h + P_0 = P_{man} + P_{atm}$

Diagrama de presión, (relación a la profundidad y a las densidades)



Variación de la presión en fluido compresible, γ variable:

Sabemos que un gas perfecto a $T=\text{cte}$, $P/\rho=P_0/\rho_0$, siendo P presión absoluta

$$\gamma = -\frac{dP}{dy} \quad dy = -\frac{dP}{\rho g} = -\frac{dP}{\frac{P}{P_0} \rho_0 g} \quad \text{reescribiendo } dy = -\frac{P_0}{\rho_0 g} \frac{dP}{P}$$

Integramos

$$\int_{y_0}^y dy = -\frac{P_0}{\rho_0 g} \int_{P_0}^P \frac{dP}{P} \quad \text{entonces } y - y_0 = -\frac{\rho_0}{\gamma_0} \ln \frac{P}{P_0} \quad \text{despejando } P = P_0 e^{\left(-\frac{\rho_0}{\gamma_0} (y - y_0)\right)}$$

Que es la ecuación para la variación de la presión con la elevación de un gas en condición isotérmica.

Variación de la presión en fluido compresible:

Sabemos que $dP = -E_v dV/V$ y a su vez $dP = -\gamma dy$ entonces igualando ecuaciones e integrando nos queda:

$$E_v \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{d\gamma}{\gamma^2} = \int_0^y dy \quad E_v \left(\frac{1}{\gamma_0} - \frac{1}{\gamma} \right) = y$$

$$E_v (\gamma - \gamma_0) = y (\gamma \gamma_0) \quad \text{luego } E_v \gamma - y (\gamma \gamma_0) = E_v \gamma_0$$

$$\text{entonces } \gamma = \frac{E_v \gamma_0}{E_v - y \gamma_0}$$

Principios de la hidrostática:

- 1- La presión en un fluido en reposo se transmite a todos los puntos con igual intensidad
- 2- La presión es mayor a mayor profundidad
- 3- Todo cuerpo sumergido recibe un empuje hacia arriba

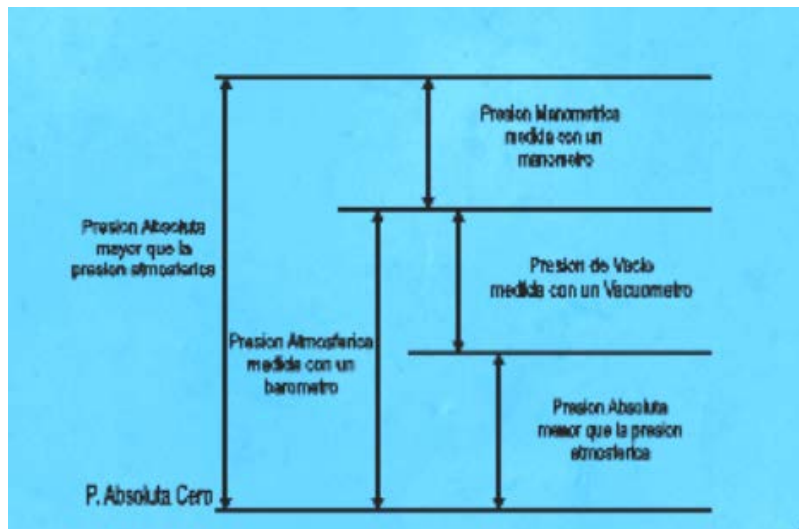
$E=W$, el cuerpo flota sumergido

$E>W$, el cuerpo flota en superficie

$E<W$, el cuerpo se hunde

Diagrama de presiones: los niveles de referencia son el vacío ($P_{abs}=0$, luego

$$P_{abs} = \pm P_{man} + P_{atm} \quad \text{o} \quad P_{man} = P_{abs} - P_{atm}$$

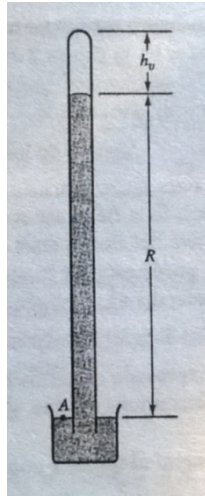


Manómetros:

Manómetro de Bourdon: es un tubo metálico plano, hueco y curvado, cerrado en uno de sus extremos, el otro extremo se conecta a la presión que va a ser medida. Cuando la presión se incrementa el tubo tiende a enderezarse arrastrando el mecanismo de indicación. La escala marca cuando la presión es la misma del medio, por lo tanto mide presión relativa.

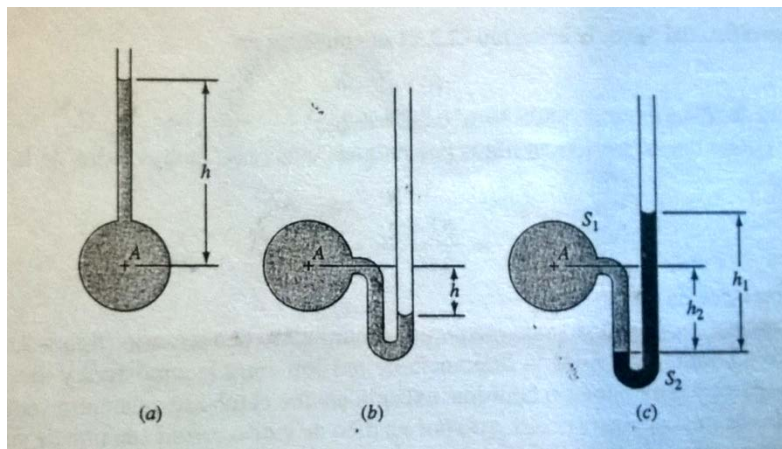


Barómetro de mercurio: sirve para medir la presión atmosférica local. Está compuesto por un tubo de vidrio cerrado en uno de sus extremos, lleno de mercurio, se invierte y se sumerge en un recipiente con mercurio



$$h_v + R = h_A \text{ (mm Hg)}$$

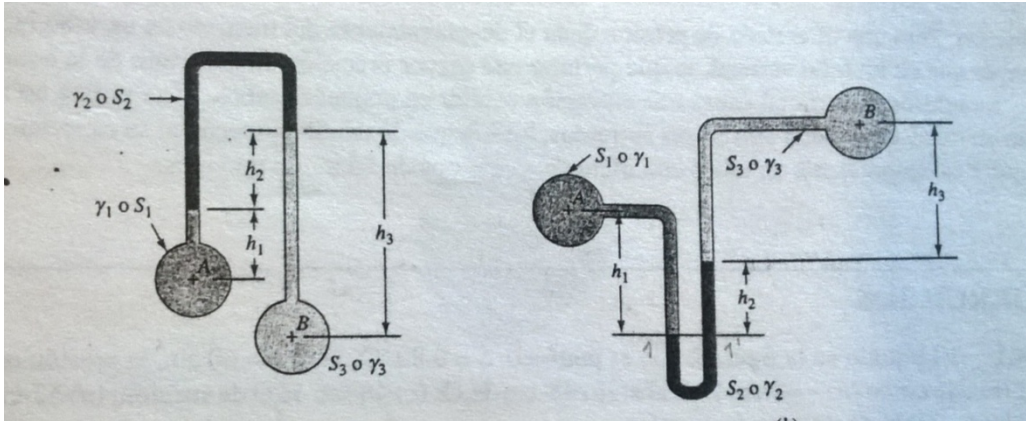
Manómetros: emplean columnas de líquido para determinar diferencias de presión:



- a- Piezómetro: es un tubo vertical que se conecta a una cañería o tanque de manera que sube por dicho tubo el líquido hasta alcanzar el equilibrio. Luego la altura h entre el menisco y el punto donde se mide la presión, nos da justo el valor de presión. Un piezómetro no trabaja con presiones relativas negativas, y es impráctico para medir grandes presiones. Finalmente si la densidad relativa es S , entonces $h_A = S h_{\text{medida}}$
- b- Reemplazando el tubo vertical del piezómetro por un tubo en "U" se puede medir presiones negativas pequeñas o presiones positivas en un líquido. Así el menisco puede llegar al reposo por debajo del punto "A" donde se está midiendo la presión. Luego

$$h_A = - S h_{\text{medida}}$$

- c- Para presiones negativas grandes o positivas grandes, se emplea un segundo líquido de densidad relativa mayor e inmiscible con el líquido de la cañería o tanque donde se mide la presión. Entonces $h_A + S_1 h_2 - S_2 h_1 = 0$



Manómetro diferencial: determina la diferencia de presión en dos puntos A y B cuando no puede determinarse la presión real en cualquier punto del sistema.

$$h_A = S_1 h_1 + S_2 h_2$$

$$h_B = S_3 h_3$$

$$\text{luego } h_A - h_B = S_1 h_1 + S_2 h_2 - S_3 h_3$$

Empuje sobre superficies planas:

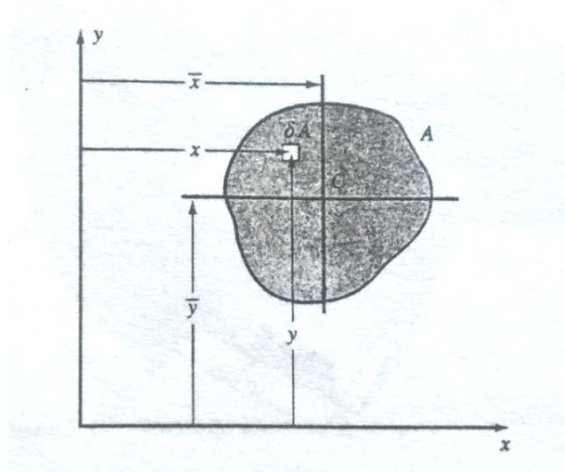
Las fuerzas distribuidas por la acción de un fluido sobre un área finita puede reemplazarse convenientemente por una fuerza resultante (empuje):

Superficies horizontales:

Están sometidas a $P=\text{cte}$ por lo tanto la magnitud de la fuerza que actúa sobre dicha superficie plana:

$$R = \int dF = \int P dA = P \int dA = PA$$

Siendo PdA fuerzas elementales paralelas y de igual sentido que en su conjunto dan la fuerza resultante R . Para encontrar la línea de acción de la R , debemos determinar el baricentro respecto a unos ejes de referencia $X Y$.



Teorema de Varignon: $\overline{L}_R = \sum \overline{L}_{FK}$

Puesto que el momento de la resultante debe ser igual al momento del sistema de fuerzas distribuidas alrededor de cualquier eje (por ejemplo eje Y)

$$P A \bar{x} = \int_A x P dA \rightarrow \bar{x} = \frac{1}{A} \int_A x dA$$

Para el eje X

$$P A \bar{y} = \int_A y P dA \rightarrow \bar{y} = \frac{1}{A} \int_A y dA$$

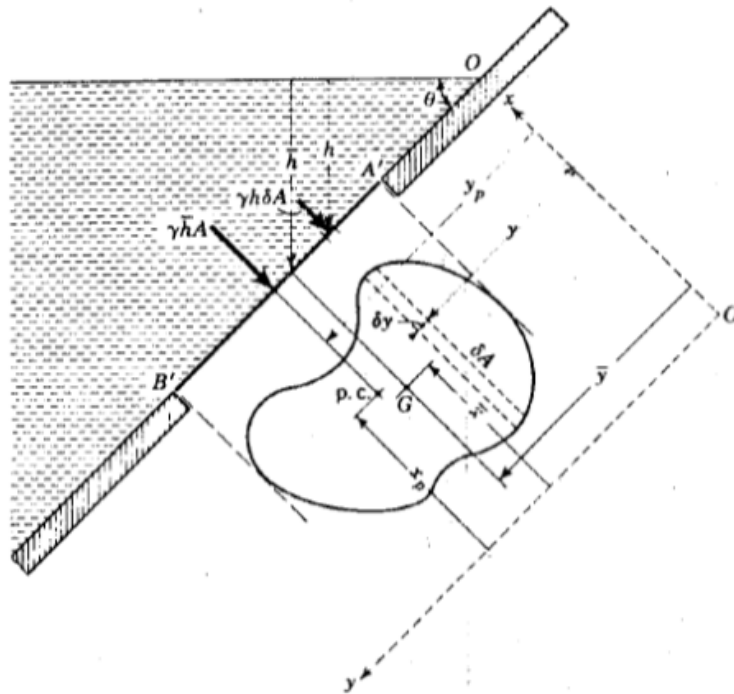
Determinamos así el baricentro de R en $G(\bar{x}, \bar{y})$.

Superficies inclinadas:

Se toma el eje Y como la traza del plano de la superficie inclinada θ° desde la horizontal. Hay que determinar la magnitud, dirección y línea de acción de la fuerza R debida al líquido que actúa sobre un lado del área.

$$R = \int dF = \int P dA = \int \gamma h dA = \int \gamma y \text{sen } \theta dA = \gamma \text{sen } \theta \int y dA$$

$$R = \gamma \text{sen } \theta \bar{y} A = \gamma h_G A = P_G A$$



El sentido de la fuerza es empujar el área si P_G es positiva. La línea de acción es perpendicular a la superficie $A'B'$, y pasa a través de un punto conocido como centro de presión (contrariamente a lo que sucede en superficie horizontal, el centro de presión no coincide con el baricentro). Entonces para encontrar el centro de presión $P(x_p, y_p)$. Se igualan los momentos de la resultante $x_p F$ y $y_p F$ con los momentos de las fuerzas distribuidas alrededor de los ejes Y-X (Teorema de Varignon):

$$x_p F = \int_A x P dA \rightarrow x_p = \frac{1}{F} \int_A x \gamma \text{sen } \theta y dA \rightarrow x_p = \frac{\gamma \text{sen } \theta}{\gamma \text{sen } \theta \bar{y} A} \int_A x y dA = \frac{I_{xy}}{\bar{y} A}$$

$$y_p F = \int_A y P dA \rightarrow y_p = \frac{1}{F} \int_A y \gamma \text{sen } \theta y dA \rightarrow y_p = \frac{\gamma \text{sen } \theta}{\gamma \text{sen } \theta \bar{y} A} \int_A y^2 dA = \frac{I_x}{\bar{y} A}$$

Por teorema de Steiner:

$$I_{xy} = I_{\bar{x}\bar{y}} + \bar{x} \bar{y} A$$

$$I_x = I_{\bar{x}} + \bar{y}^2 A$$

Finalmente:

$$x_p = \bar{x} + \frac{I_{\bar{x}\bar{y}}}{\bar{y} A} \text{ donde } I_{\bar{x}\bar{y}} \text{ puede ser positivo o negativo}$$

$$y_p = \bar{y} + \frac{I_{\bar{x}}}{\bar{y} A} \text{ donde } I_{\bar{x}} \text{ siempre es positivo}$$

, entonces el centro de presión siempre está por debajo del centro de gravedad

Empuje sobre superficies curvas:

Cuando las fuerzas elementales varían en dirección, se deben sumar como cantidades vectoriales, es decir sus componentes en tres direcciones mutuamente perpendiculares se suman como vectores y se obtiene la resultante de fuerzas.

Componente horizontal F_x : es igual al empuje o fuerza de presión ejercida sobre la proyección ED de la curva (normal a la dirección F_x). Esta componente representa el empuje que el líquido ejerce sobre la superficie proyectada EB y pasa por el centro de presión:

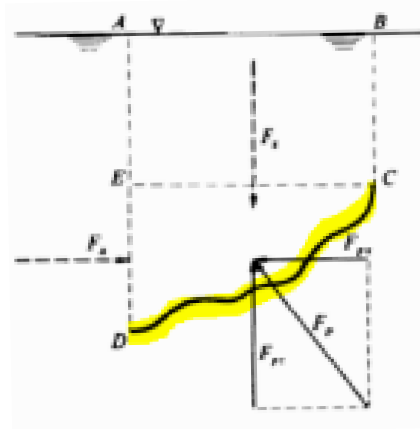
$$dF_x = P dA \cos \theta \rightarrow F_x = \int_A P dA \cos \theta$$

Componente vertical F_y : es igual al peso del líquido contenido en el volumen entre la superficie AB y la superficie CD, y pasa por el baricentro:

$$dF_y = P dA \sin \theta \rightarrow F_y = \int_A P dA \sin \theta = \gamma \int_A h \sin \theta dA = \gamma \int_V dV = \gamma V$$

Finalmente:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$



Si la superficie es alabeada hay que considerar la componente F_z .

Flotabilidad y equilibrio de cuerpos flotantes:

Fuerza de boyamiento: es la fuerza resultante que ejerce un fluido sobre un cuerpo parcialmente o totalmente sumergido, ésta siempre actúa verticalmente hacia arriba. La fuerza de boyamiento sobre un cuerpo sumergido es la diferencia entre la P_{sup} y la P_{inf} , como siempre $P_{sup} < P_{inf}$, la FB se dirige hacia arriba.

$$dF_B = (P_{sup} - P_{inf}) dA = \gamma h dA = \gamma \int_V dV = \gamma V$$

Siendo γ el peso específico del líquido desalojado y V el volumen sumergido.

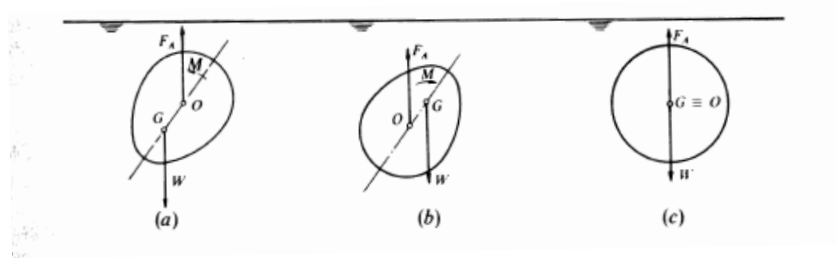
Cuerpos solo con E y W (empuje o boyamiento y peso), sumergidos completamente:

La fuerza de boyamiento tiene su línea de acción sobre el centro de gravedad del cuerpo sumergido (volumen de líquido desplazado), para diferenciarlo se llama centro de empuje:

Caso A: Como G está por debajo de O , aparece un cupla restauradora del equilibrio, por lo tanto hay equilibrio estable.

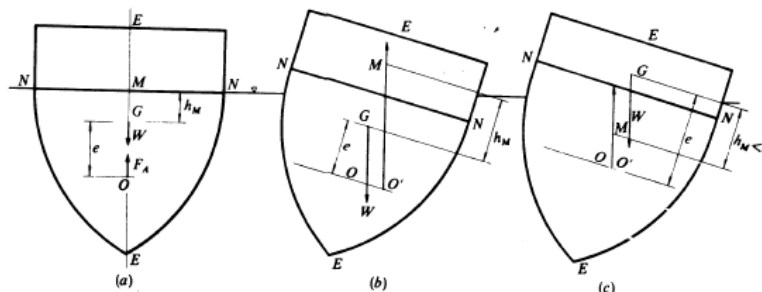
Caso B: Si G está por encima de O , la cupla tiende a desalinear más, por lo que hay equilibrio inestable.

Caso C: Si coincide $G=O$ no hay cupla por lo tanto hay equilibrio indiferente.



Casos de cuerpos parcialmente sumergidos:

Sobre un cuerpo actúan dos fuerzas la de boyamiento en "e" y el peso suyo en "G".



NN eje horizontal: plano de flotación

EE eje vertical plano de simetría

M: Metacentro, intersección del eje de simetría con el eje de boyamiento.

El barco estará o no en equilibrio según si $M > G$ (equilibrio estable) o si $M < G$ respectivamente. El valor de la cupla recuperadora depende del brazo MG .

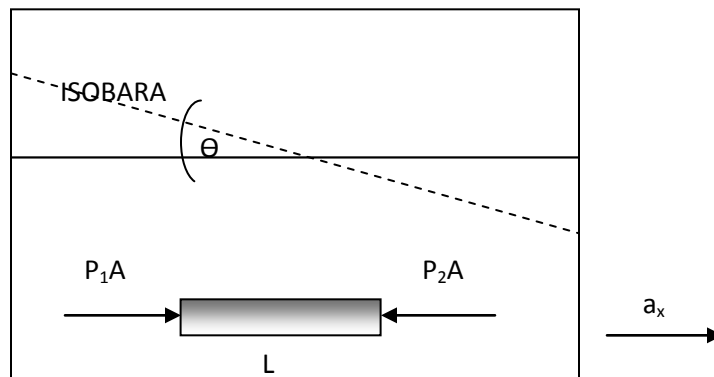
Equilibrio Relativo:

Cuando se acelera un fluido (estático) de tal manera que no haya movimiento relativo de una capa respecto a su capa adyacente (como un sólido), no existen esfuerzos de corte y la variación de presión puede determinarse mediante los principios de la hidrostática teniendo en cuenta los efectos de la aceleración. Hay dos casos:

Aceleración Lineal Uniforme:

Supongamos tener un líquido en un recipiente abierto que se someta a una aceleración lineal uniforme:

Caso bidimensional



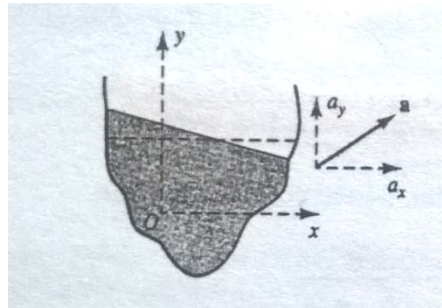
$$0 = \sum F_x = P_1 A - P_2 A - m a_x$$

$$0 = \sum F_y = P A - \gamma h A \quad y \quad a_y = 0$$

$$0 = P_1 A - P_2 A - \frac{\gamma A L}{g} a_x$$

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = L \frac{a_x}{g} \quad o \quad \frac{\Delta h}{L} = \frac{a_x}{g} = \operatorname{tg} \theta$$

Caso Bidimensional



Sabemos que $-\nabla P - j\gamma = \rho \mathbf{a}$ que en componente será:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\gamma}{g} a_x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\gamma}{g} a_y - \gamma, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

Entonces:

$$dP = -\frac{\gamma}{g} a_x dx + \left[-\gamma \left(1 + \frac{a_y}{g} \right) \right] dy$$

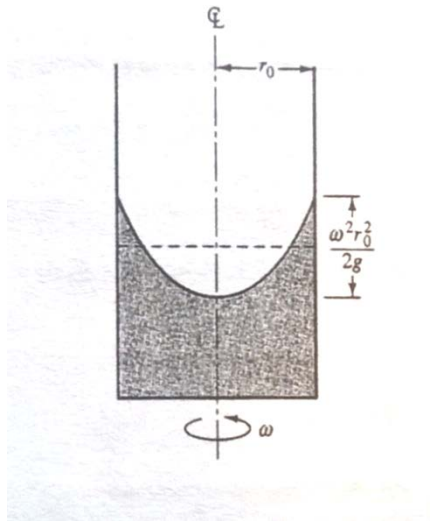
Integrando:

$$P = P_0 - \frac{\gamma}{g} a_x x + \left[-\gamma \left(1 + \frac{a_y}{g} \right) \right] y$$

$$y = -\frac{\gamma}{g} a_x x + \frac{P_0 - P}{\gamma \left(1 + \frac{a_y}{g} \right)}$$

Rotación uniforme alrededor de un eje vertical – Vórtice forzado:

La rotación de un fluido alrededor de un eje que se mueve como un sólido alrededor de un eje, se conoce como movimiento de vórtice forzado. Cada partícula de fluido tiene la misma velocidad angular (este movimiento debe distinguirse del movimiento de vórtice libre en el que cada partícula se mueve en una trayectoria circular con una velocidad que varía inversamente con la distancia desde el centro). No existen esfuerzos de corte y la única aceleración tiene dirección radial hacia el centro de la circunferencia. Sabemos que:



$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\gamma}{g} \omega^2 r \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\gamma \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

Entonces el diferencial:

$$dP = \frac{\gamma}{g} \omega^2 r \, dr - \gamma \, dy$$

Integrando:

$$P = P_0 + \frac{\gamma}{2g} \omega^2 r^2 - \gamma y \quad , \text{ para } y = 0 \text{ y } P_0 = 0 \quad h = \frac{P}{\gamma} = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

Vemos que la superficie tiene la forma de un paraboloide. La profundidad “y” varía con el cuadrado del radio. Experimentalmente se demuestra que la distancia que el fluido desciende en el centro de la parábola es igual al que asciende por las paredes respecto del nivel horizontal original.

**APÉNDICE
A**

Sistemas de fuerzas, momentos y centroides

El material de este apéndice se ha ensablado para ayudar a trabajar con sistemas de fuerza. Se repasan brevemente los sistemas simples de fuerza y se analizan el primero y segundo momentos, incluyendo el producto de inercia. Se definen los centroides y los ejes centroidales.

A.1 SISTEMAS DE FUERZAS SIMPLES

Un diagrama de cuerpo libre de un objeto o de una porción de un objeto muestra la acción de todos los demás cuerpos sobre éste. La acción de la Tierra sobre un objeto, conocida como una *fuerza de cuerpo*, es proporcional a la masa del objeto. Adicionalmente, pueden actuar fuerzas y pares sobre el objeto por contacto con su superficie. Cuando un cuerpo libre se encuentra en reposo o se mueve en una línea recta con velocidad uniforme, se dice que está en *equilibrio*. De la segunda ley del movimiento de Newton, debido a que no hay aceleración del cuerpo libre, la suma de todos los componentes de la fuerza en cualquier dirección debe ser cero y la suma de todos los momentos alrededor de cualquier eje también debe ser cero.

Dos sistemas de fuerzas son equivalentes si la suma de fuerzas en cualquier dirección y la suma de momentos alrededor de cualquier eje tienen el mismo valor. El sistema de fuerza equivalente más simple se conoce como la *resultante* del sistema de fuerza. Sistemas de fuerzas equivalentes siempre producen el mismo movimiento (o falta de movimiento) de un cuerpo libre.

En sistemas de fuerzas coplanares la resultante es una fuerza o un par. En sistemas de fuerza paralelos no coplanares la resultante puede ser una fuerza o un par. En sistemas no coplanares generales la resultante puede ser una fuerza, un par o una fuerza y un par.

La acción de un fluido sobre cualquier superficie puede reemplazarse por el sistema de fuerza resultante que produce el mismo movimiento externo o reacción que el sistema de fuerzas distribuidas del fluido. En esta situación el fluido puede considerarse removido completamente, y en su lugar actúa la resultante.

A.2 PRIMERO Y SEGUNDO MOMENTOS: CENTROIDES

El momento de un área, un volumen, un peso o una masa puede determinarse en forma análoga a la de momentos de una fuerza alrededor de un eje.

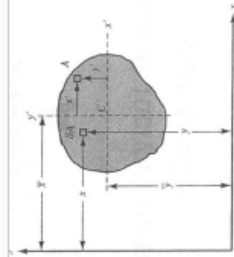


Figura A.1 Notación para el primero y el segundo momentos.

Primer momento

El momento de un área A alrededor del eje y (figura A.1) se expresa mediante

$$\int_A x \, dA$$

donde la integración se lleva a cabo sobre toda el área. Para determinar el momento alrededor de un eje paralelo, por ejemplo, $x = k$, el momento se convierte en

$$\int_A (x - k) \, dA = \int_A x \, dA - kA \tag{A.1}$$

la cual muestra que siempre existirá un eje paralelo a $x = k = \bar{x}$, alrededor del cual el momento es cero. Este eje, conocido como el *eje centroidal*, se obtiene de la ecuación (A.1) haciéndolo igual a cero y resolviendo para \bar{x} .

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_A x \, dA \tag{A.2}$$

Se puede determinar otro eje centroidal paralelo al eje x como

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \int_A y \, dA \tag{A.3}$$

El punto de intersección de los ejes centroidales se conoce como el *centroide* del área. Fácilmente se puede demostrar, rotando los ejes, que el primer momento de área es cero alrededor de cualquier eje que pase por el centroide. Un eje de simetría de un área, es un eje centroidal debido a que los momentos correspondientes a los elementos de área a cada lado del eje son iguales en magnitud y opuestos en signo. Cuando se conoce la localización del centroide, el primer momento alrededor de cualquier eje puede obtenerse sin integración, tomando el producto del área y de la distancia desde el centroide hasta el eje, es decir,

$$\int_A z \, dA = \bar{z}A \tag{A.4}$$

El eje centroidal de un triángulo, paralelo a un lado, está a un tercio de la altura medida desde ese lado; el centroide de un semicírculo de radio a es $4a/3\pi$ desde el diámetro.

Tomando el primer momento de un volumen V alrededor de un plano, por ejemplo el plano yz , la distancia hasta su centroide se determina en forma similar como

$$\bar{x} = \frac{1}{V} \int_V x \, dV \quad (A.3)$$

El centro de masa de un cuerpo se determina mediante el mismo procedimiento,

$$\bar{x}_m = \frac{1}{M} \int_M x \, dm \quad (A.4)$$

donde dm es un elemento de masa y M es la masa total del cuerpo. Para propósitos prácticos de ingeniería el centro de gravedad de un cuerpo es igual a su centro de masa.

Segundo momento

El segundo momento de un área A (figura A.1) alrededor del eje y es

$$I_y = \int_A x^2 \, dA \quad (A.7)$$

Éste se conoce como el momento de inercia del área y siempre es positivo, debido a que dA siempre se considera positivo. Después de transferir el eje a un eje paralelo a través del centroide C del área,

$$I_y = \int_A (x - \bar{x})^2 \, dA = \int_A x^2 \, dA - 2\bar{x} \int_A x \, dA + \bar{x}^2 \int_A dA$$

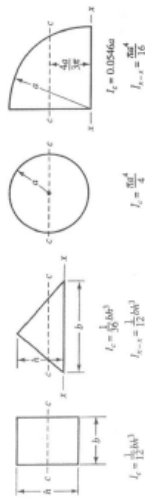
Debido a que

$$\int_A x \, dA = \bar{x}A \quad \int_A x^2 \, dA = I_y \quad \int_A dA = A$$

por consiguiente,

$$I_y = I_y - \bar{x}^2 A \quad 0 \quad I_y = I_y + \bar{x}^2 A \quad (A.8)$$

En palabras, el momento de inercia de un área alrededor de cualquier eje es la suma del momento de inercia alrededor de un eje paralelo a través del centroide y del producto del área y el cuadrado de la distancia entre los ejes. La figura A.2 muestra los momentos de inercia para 4 áreas simples.



El producto de inercia I_{xy} de un área se expresa mediante

$$I_{xy} = \int_A xy \, dA \quad (A.9)$$

con la notación de la figura A.1. Puede ser positivo o negativo. Escribiendo la expresión para el producto de inercia alrededor del eje, xy en términos de \bar{x} y \bar{y} , figura A.1,

$$I_{xy} = \int_A (\bar{x} + x')(y + y') \, dA = \bar{x}\bar{y}A + \int_A x'y' \, dA + \bar{x} \int_A y' \, dA + \bar{y} \int_A x' \, dA = \bar{x}\bar{y}A + \bar{I}_{xy} \quad (A.10)$$

\bar{I}_{xy} es el producto de inercia alrededor de ejes centroidales paralelos al eje xy . Cuando cualquiera de estos ejes es un eje de simetría para el área, el producto de inercia es cero. El producto de inercia \bar{I}_{xy} para un triángulo que tenga lados b y h a lo largo de los ejes coordenados positivos es $b^2h^2/24$.

CINEMÁTICA DE LOS FLUIDOS

TEMA 3

Tema 3 – Cinemática de los fluidos

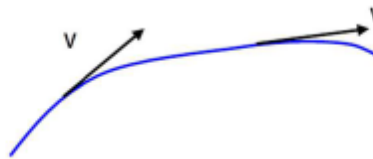
La cinemática estudia el movimiento o flujo de los fluidos. Hay dos enfoques:

Enfoque Lagrangiano (seguir una partícula o viajar en ella): se observa como varían las propiedades de la partícula considerada. Este enfoque trata el paquete de fluido como un sólido donde cada partícula mantiene la misma posición relativa con el resto de las partículas. Por lo tanto para un fluido cuyo movimiento es muy desordenado, las partículas se mezclan por lo que se hace necesario adoptar otro enfoque para hacer el análisis.

Enfoque Euleriano (observador en reposo): se observa como varían las propiedades en cierto punto del espacio. El fluido se irá removiendo continuamente, no interesa una partícula individual sino ver la variación de las condiciones del flujo en cierto punto (también podemos considerarlo como un volumen de control fijo).

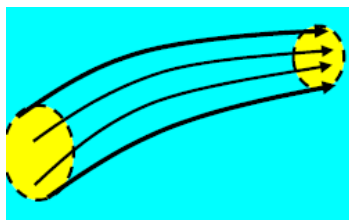
Trayectoria: es el lugar geométrico de las distintas posiciones ocupadas por una partícula en su movimiento.

Línea de corriente: es una línea continua trazada en el fluido, de tal modo que tenga la dirección del vector velocidad en cada punto. Por lo tanto no puede haber flujo a través de una línea de corriente, por eso también se le llama línea impermeable;



siempre tiene igual dirección que el vector velocidad $\vec{v} = \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$ ecuación de la línea de corriente.

Tubo de corriente: es el tubo formado por todas las líneas de corriente que atraviesan una curva cerrada pequeña, es impermeable y respeta la ley de conservación de masa. (Filamento de corriente, es un tubo de corriente de sección infinitesimal).

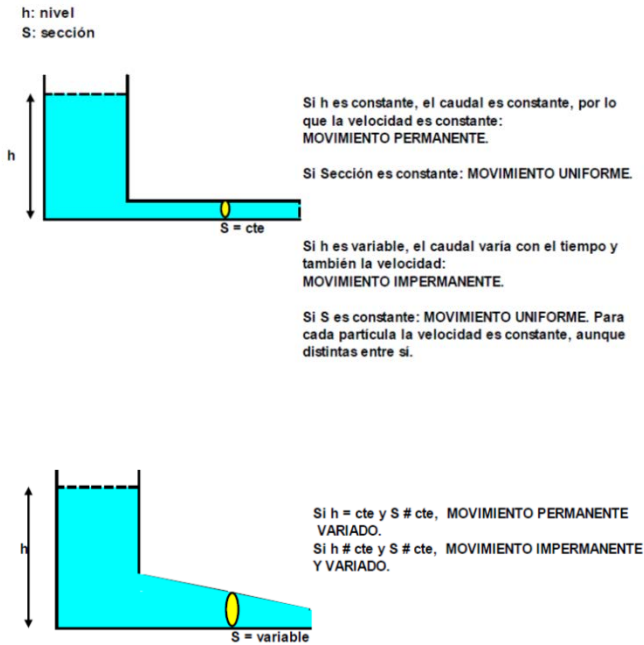


Clasificación de los movimientos:

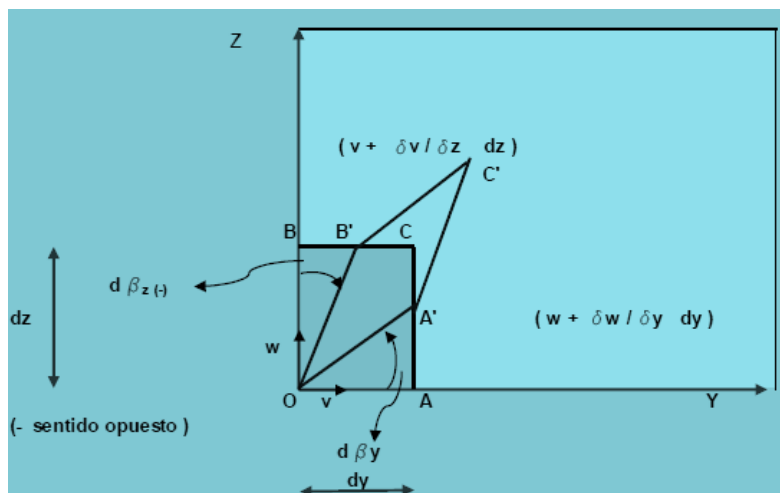
Movimiento permanente: es aquel en el que las propiedades del fluido en un punto, no cambian con el tiempo. $\frac{dv}{dt} = 0, \frac{dP}{dt} = 0, etc$

Movimiento uniforme: en una línea de corriente las características del flujo no varían

$$\frac{dv}{ds} = 0, \frac{dP}{ds} = 0, etc$$



Movimiento rotacional: es aquel en el cual se producen deformaciones angulares o rotación de las partículas respecto a un eje. Consideremos una partícula de un fluido ideal (incompresible y sin rozamiento) en un espacio bidimensional, entonces: $\vec{v} = f(v, w)$



Consideramos la partícula OABC que se deforma a OA'B'C'. La arista OA gira un ángulo $d\beta y$ y OB gira $d\beta z$. Al comienzo OA tenía igual velocidad pero luego una fuerza provoca una variación de velocidad en los extremos igual para OB, $v \rightarrow \left(v + \frac{\partial v}{\partial z} dz \right)$ y $w \rightarrow \left(w + \frac{\partial w}{\partial y} dy \right)$

Sabemos que matemáticamente **arco = ángulo x radio**, entonces $AA' = d\beta y dy$, y además físicamente **espacio = velocidad x tiempo**, $AA' = (d\beta y/dy) dy dt$ igualando $\frac{d\beta y}{dt} = \frac{\partial w}{\partial y}$ y la velocidades de rotación alrededor del eje x, $w_{xy} = + \frac{\partial w}{\partial x}$ y $w_{xz} = + \frac{\partial v}{\partial z}$

Luego el promedio de giro alrededor del eje X, $w_x = \frac{1}{2} (w_{xy} + w_{xz}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)$

el promedio de giro alrededor del eje Y, $w_y = \frac{1}{2} (w_{yx} + w_{yz}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$

el promedio de giro alrededor del eje Z, $w_z = \frac{1}{2} (w_{zx} + w_{zy}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$

Finalmente la velocidad angular total será $\bar{w} = w_x + w_y + w_z$

Y resumiendo según análisis matemático:

$$w = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{rot } \bar{v} = \frac{1}{2} (\nabla \times \bar{v})$$

Si el determinante es no nulo entonces el movimiento es rotacional (flujo real)

Si el determinante es nulo entonces el movimiento es irrotacional (flujo ideal), $w_x = w_y = w_z = 0$

Movimiento laminar y turbulento:

Experiencia de Reynolds; consiste en un depósito de agua con una válvula que se abre gradualmente, en el cual se inyecta colorante por un tubo de vidrio a lo largo de una cañería. Se observa que cuando la abertura de la válvula es pequeña, el colorante se distingue muy bien del agua siguiendo o formando una línea recta a través del tubo (flujo laminar).

Cuando la abertura es mayor, se producen remolinos y el agua adquiere el color del colorante (flujo turbulento). El movimiento turbulento disipa mucha más energía que el laminar y existen esfuerzos cortantes que no siguen la ley de viscosidad de Newton (Hipótesis de Boussnesq, incluye la viscosidad de remolino). Vemos que al aumentar la abertura, el caudal aumenta y como $Re = (D\rho/\mu) v$ ó $Re = cte v$, el Re aumenta con la velocidad. Experimentalmente se sabe que $Re \leq 2000$ el flujo es laminar y su perfil de velocidad es una parábola, Por el contrario en el movimiento turbulento, $Re > 10000$ la distribución de velocidad es logarítmica.



Se formó un parámetro adimensional llamado número de Reynolds:

$$Re = V \cdot D / \nu$$

Para Re menor de 2.000 el régimen es Laminar. Hasta aproximadamente 4.000 es de Transición (no determinado exactamente) y luego Turbulento. Para movimiento Laminar, la distribución de velocidades en una sección circular es una parábola, con un máximo en el centro y con valor cero en el contorno.

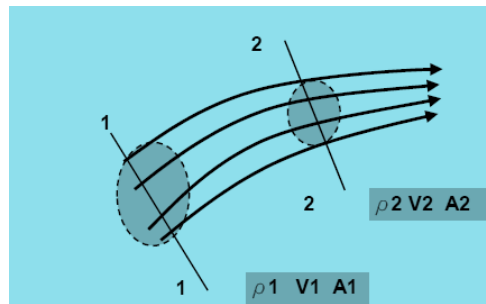


En una tubería la distribución de velocidades en movimiento turbulento es una curva logarítmica. Las partículas chocan entre sí intercambiando energía y las velocidades son más uniformes.



Ecuación de continuidad para fluidos incompresibles y compresibles:

Consideramos el flujo permanente de un fluido compresible a través de un tubo de corriente. Como no puede haber paso de fluido a través de las líneas de corriente del tubo, la masa por unidad de tiempo que entra por la sección "1-1" tiene que ser igual a la que sale por la sección "2-2".



$$\text{sección 1.1} \quad dm_1 = \rho_1 dV_1 = \rho_1 dA_1 dS_1 = \rho_1 dA_1 v_1 dt \rightarrow \frac{dm_1}{dt} = \rho_1 dA_1 v_1$$

$$\text{sección 2.2} \quad dm_2 = \rho_2 dV_2 = \rho_2 dA_2 dS_2 = \rho_2 dA_2 v_2 dt \rightarrow \frac{dm_2}{dt} = \rho_2 dA_2 v_2$$

Como el caudal másico $m_1 = m_2$:

$$\frac{dm_1}{dt} = \frac{dm_2}{dt} \rightarrow \rho_1 dA_1 v_1 = \rho_2 dA_2 v_2$$

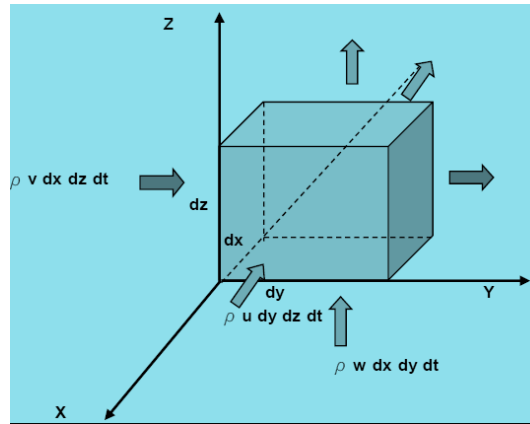
Y en el límite cuando dA tiende a cero, queda

$$\int_{A_1} \rho_1 v_1 dA_1 = \int_{A_2} \rho_2 v_2 dA_2$$

$$\rho_1 \int_{A_1} v_1 dA_1 = \rho_2 \int_{A_2} v_2 dA_2 \rightarrow \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$$

Ecuación de continuidad para movimiento permanente y fluido compresible. Si el fluido es incompresible ($\rho = \text{cte}$) la ecuación de continuidad queda: $v_1 A_1 = v_2 A_2 = \text{cte}$ caudal volumétrico.

Consideremos ahora un volumen de control en forma de cubo donde el fluido ingresa por 3 caras (4 5 6) y sale por las otras 3 caras (1 2 3):



Masa que ingresa:

$$\text{cara 1} \quad dm_1 = \rho u \, dy \, dz \, dt$$

$$\text{cara 2} \quad dm_2 = \rho v \, dx \, dz \, dt$$

$$\text{cara 3} \quad dm_3 = \rho w \, dx \, dy \, dt$$

Masa que egresa:

$$\text{cara 4} \quad dm_4 = \left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right) dy \, dz \, dt$$

$$\text{cara 5} \quad dm_5 = \left(\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy \right) dx \, dz \, dt$$

$$\text{cara 6} \quad dm_6 = \left(\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz \right) dx \, dy \, dt$$

Hacemos el balance y luego restamos $dm_e - dm_s$

$$\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right) dy \, dz + \left(\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy \right) dx \, dz + \left(\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz \right) dx \, dy = 0$$

Si se cumple la ecuación de continuidad, $dm_e - dm_s = 0$

$$\left[\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) \right] dx \, dy \, dz = 0$$

Siendo $dx dy dz \neq 0$, nos queda

$$\left[\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) \right] = 0$$

Finalmente nos queda $\mathbf{div}(\rho \bar{v}) = 0$ para movimiento permanente compresible.

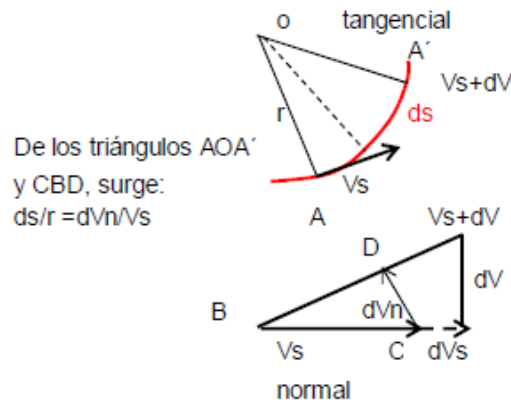
Y $\mathbf{div}(\bar{v}) = 0$ para movimiento permanente e incompresible.

En un caso real por lo general la divergencia no se anula pues en el interior de volumen de control puede haber una fuente (puntos que ceden masa) o un sumidero (puntos que absorben masa) por lo que variaría la masa y forma del cubo. Entonces: $\mathbf{div}(\rho \bar{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t}$ movimiento compresible impermanente

Podemos decir que $\nabla \cdot (\rho \bar{v})$ nos mide la variación de la masa del cubo de acuerdo a la masa que ingresa y que egresa, las que si son iguales permiten que el cubo mantenga su forma.

Aceleración:

En el flujo hay aceleraciones tangenciales y normales (la velocidad de la partícula cambia en modulo y dirección). Así una partícula tendrá aceleraciones debidas a la traslación de un punto a otro (aceleración convectiva) y otro tipo de aceleración debida a perturbaciones (aceleración localizada)



$$\text{Aceleración tangencial } a_s = \frac{dV_s}{dt} = \frac{dV_s}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dV_s}{ds} V_s \rightarrow a_s = \frac{1}{2} \frac{d(V_s^2)}{ds}$$

Producen variación de velocidad, las líneas de fluido no se curvan.

$$\text{Aceleración normal } a_n = \frac{dV_n}{dt} = \frac{dV_n}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dV_n}{ds} V_s \text{ como } AoA' = CBD, \frac{ds}{r} = \frac{dVn}{Vs}$$

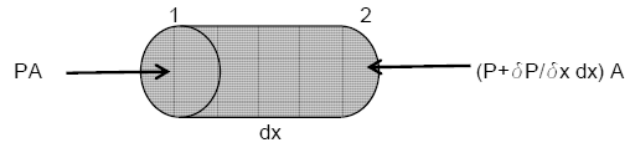
$$a_n = \frac{V_s^2}{r}$$

Producen variación de dirección, las líneas de fluido se curvan.

Ambas aceleraciones se llaman convectivas pues dependen del movimiento de las partículas a lo largo de la línea de corriente. Puede haber algún punto de la corriente en que hayan remolinos, entonces puede existir una aceleración local.

Relación entre el gradiente de presiones y la aceleración:

Consideramos un cilindro de fluido:



Determinamos la resultante de fuerzas en la dirección del eje X:

$$F_x = \sum F_x = P A - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) A = - \frac{\partial P}{\partial x} dx A \rightarrow \frac{F_x}{dx A} = - \frac{\partial P}{\partial x}$$

Y además

$$F_x = - \frac{\partial P}{\partial x} dx A = \rho dx A a_x \rightarrow F_x = - \frac{\partial P}{\partial x} = \rho a_x$$

Si fijamos una dirección (eje X) entonces la derivada parcial se convierte en total

$$\text{Para una dirección } s: F_s = - \frac{\partial P}{\partial s} = \rho a_s = \rho \frac{1}{2} \frac{d(V_s^2)}{ds}$$

$$\text{Para una dirección } n: F_n = - \frac{\partial P}{\partial n} = \rho a_n = \rho \frac{V_s^2}{r}$$

Integramos, como derivada total:

$$- \int \frac{\partial P}{\partial s} = \frac{\rho}{2} \int \frac{d(V_s^2)}{ds} \rightarrow P_1 - P_2 = \frac{\rho}{2} (V_{s2}^2 - V_{s1}^2)$$

Retomamos la ecuación Fn:

$$- \frac{\partial P}{\partial n} = \rho \frac{V_s^2}{r} - \frac{\rho}{2} \frac{d(V_s^2)}{dn} + \frac{\rho}{2} \frac{d(V_s^2)}{dn}$$

$$- \frac{\partial P}{\partial n} = \rho \frac{V_s}{r} V_s - \frac{\rho}{2} \frac{dV_s}{dn} V_s + \frac{\rho}{2} \frac{d(V_s^2)}{dn}$$

$$- \frac{\partial P}{\partial n} = \rho V_s \left(\frac{dV_n}{ds} - \frac{dV_s}{dn} \right) + \frac{\rho}{2} \frac{d(V_s^2)}{dn}$$

Si el movimiento es irrotacional entonces $\left(\frac{dV_n}{ds} - \frac{dV_s}{dV_n}\right) = 0$

y si se integra volvemos a $P_1 - P_2 = \frac{\rho}{2} (V_{s2}^2 - V_{s1}^2)$ que es la ecuación de balance energético.

Función potencial:

Retomamos el movimiento irrotacional donde

$$w = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{rot } \bar{v} = \frac{1}{2} (\nabla \times \bar{v}) = 0$$

que resolviendo el determinante nos queda

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \hat{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \hat{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \hat{k}$$

Ahora consideramos en forma general que

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \text{donde } \varphi(x, y, z) \text{ es una función potencial cualquiera}$$

Si $\varphi(x, y, z)$ existe entonces el determinante dará:

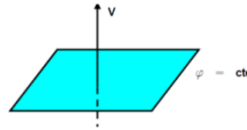
$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y}\right) \hat{i} + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}\right) \hat{j} + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right) \hat{k} = 0$$

Se cumple que $\text{rot } \bar{v} = 0$, por lo tanto los movimientos irrotacionales admiten función potencial.

Consideramos ahora la ecuación de velocidad

$$\vec{v} = u \hat{i} + v \hat{j} + w \hat{k} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{k} = \text{grad } \varphi = \nabla \varphi$$

Si $\varphi(x, y, z)$ representa una superficie, entonces el vector velocidad será perpendicular a dicha superficie.



Hay muchas maneras de pasar de φ a $\varphi + d\varphi$, la relación $\frac{d\varphi}{r}$ será máxima cuando dr sea mínimo; sabemos que el gradiente da la máxima variación de la función potencial φ en una dirección dada.

Si $\varphi = cte$ $d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0$ ecuación de la línea equipotencial $u dx + v dy = 0$

Entonces

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\varphi cte} = -\frac{u}{v}$$

Función de corriente:

Sabemos que la velocidad es: $u = dx/dt$ y $v = dy/dt$ despejando dt e igualando nos queda $dx/u = dy/v$ entonces:

$$u dy - v dx = 0 \text{ ecuación de una línea de corriente}$$

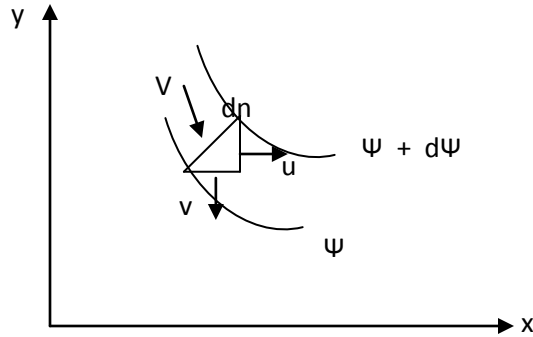
Definimos $\Psi(x, y)$ como cierta función de corriente tal que $u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$ y $v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ entonces nos queda:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx = d\Psi$$

Para $\Psi = cte$ a lo largo de una línea de corriente:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\Psi cte} = \frac{v}{u}$$

Concluimos que las líneas de corriente son normales a la superficies equipotenciales, pues v/u y $-u/v$ son pendiente inversas con signos cambiado (definición de rectas perpendiculares).



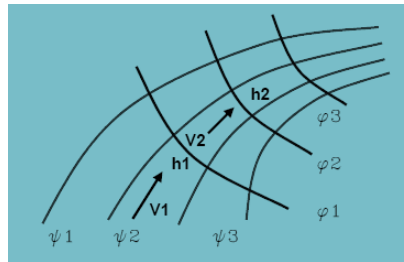
Se cumple que el caudal que ingresa es igual al que sale de dn

$$v \, dn = u \, dy - v \, dx = d\Psi$$

Entonces el valor numérico de $d\Psi$ para pasar de una línea de corriente a otra, nos da el caudal que circula entre ambas líneas.

Las funciones ϕ y Ψ satisfacen la ecuación de Laplace y cumplen con las ecuaciones de Cauchy-Riemann, son armónicas conjugadas.

Red de corriente:



$$V_1 \cdot h_1 = V_2 \cdot h_2 = \text{cte} \quad \text{si } V_1 > V_2 \text{ entonces } P_1 < P_2$$

Cuando las líneas se juntan implica un aumento de velocidad y una disminución de la presión.

Ecuación de Laplace:

Finalmente nos queda $u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$ y $v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ derivando u respecto de x y v respecto de y , y luego sumando miembro a miembro:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = 0$$

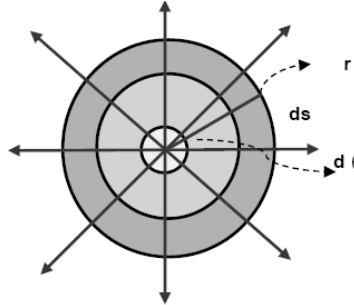
Laplaciano:

$$\nabla^2 \phi = \text{div grad } \phi = \nabla \cdot \nabla \phi = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{j} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

para la función potencial (ídem para Ψ)

Estudios de movimientos mediante fuentes y sumideros:

Consideramos una fuente de velocidad radial con caudal constante que atraviesa a la superficie de radio r y largo unitario: $Q = (2\pi r \cdot 1) v$ ó $v r = Q/2\pi$. Entonces el momento del vector velocidad será: $K = v r = Q/2\pi$.



Sabemos que $v = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial s}$ entonces $\partial \phi = v \partial r = \frac{Q}{2\pi}$ *integramos* $\phi = \frac{Q}{2\pi} \ln r + cte$

Que da una familia de circunferencias concéntricas, donde cada circunferencia es una línea equipotencial.

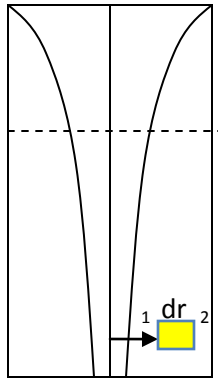
Y $\partial \psi = v \partial s = \frac{Q}{2\pi r} \partial s$ *integramos* $\psi = \frac{Q}{2\pi} \theta + cte$

Que son una familia de rectas radiales.

Para un sumidero son validas las expresiones anteriores con signos opuestos.

Vórtice libre:

Un vórtice es una rotación uniforme. Un vórtice forzado hace que todas las partículas de un fluido se muevan fija respecto al eje de rotación (como si fuera un sólido). Un vórtice libre, cada partícula se mueve en una trayectoria circular con velocidad que varia inversamente con la distancia r desde el centro. Otra característica es que luego de detener el recipiente donde gira el fluido, este sigue girando (inercia).



En una línea de corriente $P + \frac{\rho v^2}{2} = cte \rightarrow \frac{dp}{dr} = -\frac{\rho 2v}{2} \frac{dv}{dr} \rightarrow \frac{dp}{dr} = -\rho v \frac{dv}{dr}$

En 1 y 2 no tengo igual presión debido a la fuerza centrífuga:

$$dF = dm \omega^2 r = \rho A dr \omega^2 r \rightarrow \frac{dF}{A dr} = \frac{dP}{dr} = \rho \omega^2 r$$

Igualando,

$$\rho \omega^2 r = -\rho v \frac{dv}{dr} \rightarrow \frac{v^2}{r^2} r = -v \frac{dv}{dr} \rightarrow \frac{dr}{r} + \frac{dv}{v} = 0$$

Integramos:

$$\ln r + \ln v = cte \rightarrow \ln(r \cdot v) = k \text{ por lo tanto } e^k = r v \text{ cuando } r = 0 \text{ } v \rightarrow \infty$$

Entonces como $cte = r v$, se cumple la característica del vórtice libre donde $V = cte/r$, v y r son inversamente proporcionales, por lo tanto el fluido no se comporta como un sólido.

Forma del vórtice libre

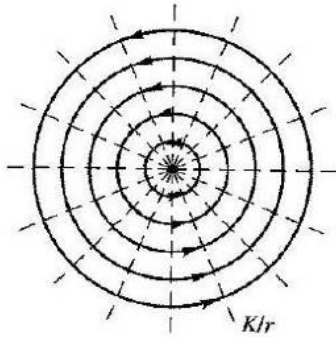
$$dF = \rho A dr \omega^2 r \rightarrow dP = \frac{\gamma}{g} dr \omega^2 r \rightarrow dy = \frac{\omega^2 r dr}{g} \frac{r}{r} \rightarrow dy = \frac{v^2 dr}{g r}$$

Sustituimos v por K/r (Ecuación de Drall), entonces:

$$dy = \frac{k^2 dr}{g r^3} \text{ intengrando } y = -\frac{k^2}{g} \frac{r^{-2}}{2}$$

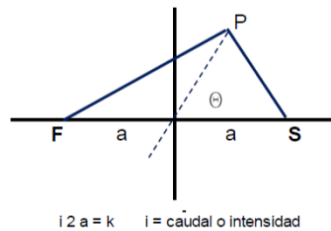
por lo tanto tenemos la ecuación de una hipérbola $y = -\frac{k^2}{2g r^2} + cte$

En las inmediaciones del centro se cumple un vórtice forzado y hacia afuera vórtice libre.



Doblete, flujo alrededor de un cilindro de sección circular:

- a- El doblete bidimensional se define como el caso límite de una fuente y un sumidero, próximos y de igual intensidad (producto $I \cdot \text{distancia} = cte$), el eje del doblete va del sumidero a la fuente:

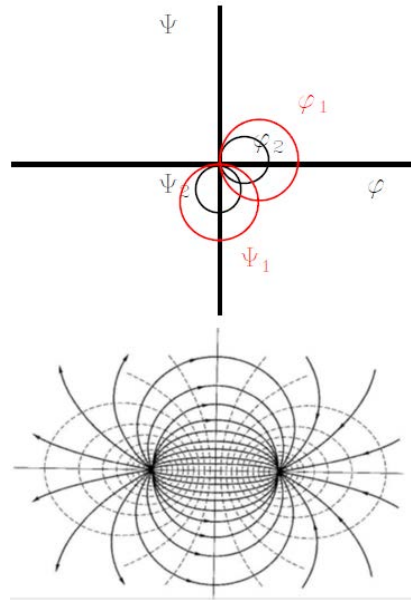


Función potencial en P:

$$\varphi = \frac{K \cos \theta}{r}$$

Función de corriente en P:

$$\psi = -\frac{K \operatorname{sen} \theta}{r}$$

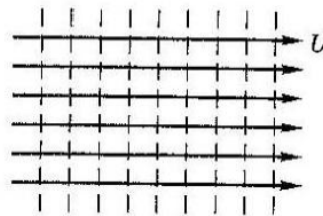


b- Consideramos flujo alrededor de un cilindro y analizaremos no muy cerca del mismo primeramente el flujo uniforme:

Corriente uniforme u_i

$\psi = uy$

$\phi = ux$



Función potencial en P:

$$\phi = v_x = v_o r \cos \theta$$

Función de corriente en P:

$$\Psi = v_y = v_o r \sen \theta$$

c- La suma de la red de corriente de un doblete con la de un flujo uniforme

Función potencial en P:

$$\varphi = v_o r \cos \theta + \frac{K \cos \theta}{r} = \cos \theta \left(v_o r + \frac{k}{r} \right)$$

Función de corriente en P:

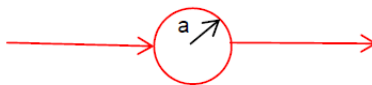
$$\Psi = v_o r \sin \theta - \frac{K \sin \theta}{r} = \sin \theta \left(v_o r - \frac{k}{r} \right)$$

Vemos que:

Si $\varphi=0$, $\cos \theta = 0$ para 90° y 270° entonces $v_o r + \frac{k}{r} = 0 \rightarrow r = \sqrt{-\frac{k}{v_o}}$

Si $\Psi=0$, $\sin \theta = 0$ para 0° y 180° entonces $v_o r - \frac{k}{r} = 0 \rightarrow r = \sqrt{\frac{k}{v_o}} = a$

La línea de corriente será una circunferencia de radio a. Para otros valores de Ψ tendremos otras líneas de corrientes que se ondularan entorno a dicha circunferencia.



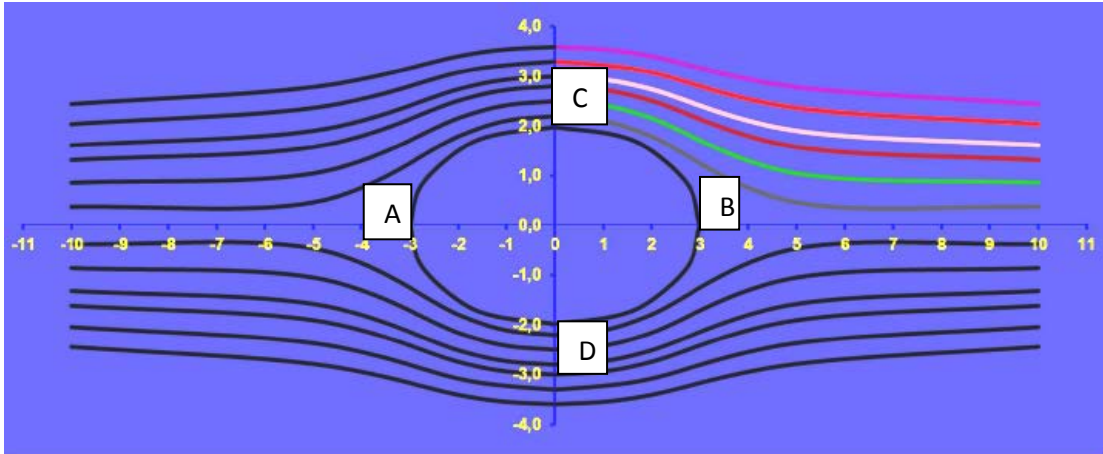
La función potencial y la función de corriente de la red de flujo uniforme alrededor de un cilindro de radio a será: (sustituimos $K=fc(a)$, $K = v_o \cdot r^2$)

Función potencial en P:

$$\varphi = \cos \theta v_o \left(r + \frac{a^2}{r} \right)$$

Función de corriente en P:

$$\Psi = \sin \theta v_o \left(r - \frac{a^2}{r} \right)$$



La velocidad en cualquier punto puede determinarse la función de corriente o por el potencial de velocidad. Sobre la superficie del cilindro la velocidad es tangencial.

$$v = \frac{d\Psi}{dr} = \text{sen } \theta \left(v_o + \frac{v_o a^2}{r^2} \right) \rightarrow \text{si } r = a \quad v = 2 v_o \text{ sen } \theta$$

En A y B, $\theta=0^\circ$ y 180° entonces $v_A=v_B=0$

En C y D, $\theta=90^\circ$ y 270° entonces $v_C=v_D=v_{\text{max}}=2v_o$

Vemos que en los puntos C y D la velocidad se duplica, son puntos de velocidad máxima y presión mínima.

Si ahora consideramos el cilindro girando, entonces el flujo alrededor será la suma de la red de flujo uniforme y las redes de los flujos de vórtice y doblete.

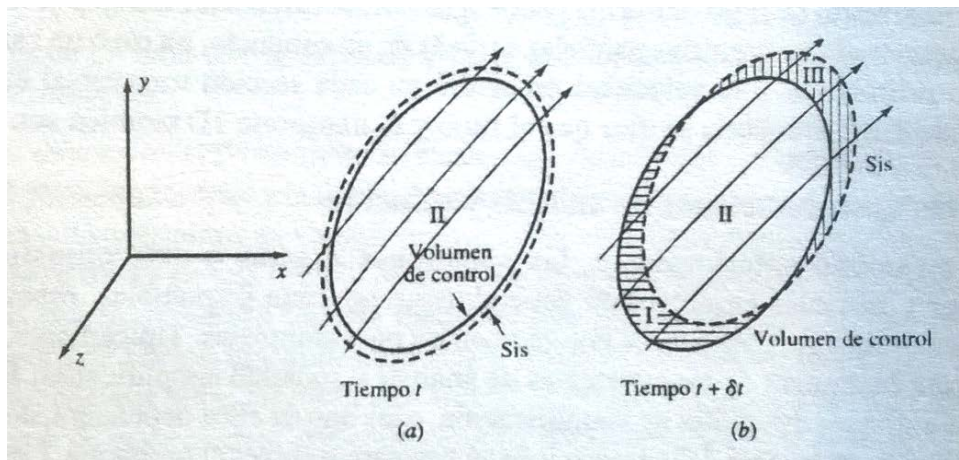
DINÁMICA DE LOS FLUIDOS

TEMA 4

Tema 4 – Dinámica de los fluidos

La dinámica es la parte de la mecánica que estudia los movimientos en función de las causas que lo provocan (fuerzas). La hidrodinámica es la parte de la mecánica de los fluidos que estudia el movimiento de fluidos cuando sobre ellos actúan fuerzas. Recordamos que se introdujo para este estudio el concepto de volumen de control según el enfoque Euleriano, pues como las moléculas de fluido se mueven desordenadamente no se puede utilizar un sistema de masa fija por lo tanto podemos deducir las ecuaciones de la dinámica de fluidos a partir de los cambios de masa, momentum y energía a medida que el fluido pasa a través o cerca del volumen de control. La frontera del volumen de control se llama superficie de control.

Ecuación general de conservación en un volumen de control:



Vemos que el sistema se mueve con el fluido mientras que el volumen de control permanece en su posición original. Sea N una propiedad cualquiera (masa, energía, momentum, etc) dentro del sistema en el tiempo t ; y n la misma propiedad pero por unidad de masa. La tasa temporal de incremento de N para el sistema se formula en base ahora en términos del volumen de control. En el tiempo $t+dt$ el sistema ocupa el volumen 2 y 3, mientras que en t ocupaba solo 2. El incremento de la propiedad N del sistema en el tiempo dt está dado por:

$$\frac{N_{sis_{t+dt}} - N_{sis_t}}{dt} = \frac{\left(\int_2 n \rho dV + \int_3 n \rho dV \right)_{t+dt} - \left(\int_2 n \rho dV \right)_t}{dt}$$

Aplico el límite cuando dt tiende a cero

$$\frac{dN}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{VC} n \rho dV + \int_{SC} n \rho V dA$$

Esta ecuación establece que la tasa temporal de incremento de N dentro de un sistema es exactamente igual a la tasa temporal de incremento de la propiedad N dentro del volumen de

control (fijo respecto a xyz) mas la tasa neta de flujo de N a través de la frontera o superficie de control.

Ecuación general de transporte de Reynolds:

Un segundo enfoque que lleva a los mismos resultados, es transformar la integral de superficie en una integral de volumen, para ello usamos el teorema de divergencia de Gauss:

$$\frac{dN}{dt} = \int_{VC} \left[\frac{d}{dt} \rho n + \nabla (n \rho V) \right] dV$$

Que para un tamaño infinitesimal $N=n$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\partial \rho n}{\partial t} + \nabla (n \rho V)$$

Que es el teorema del transporte diferencial de Reynolds.

Equilibrio dinámico – Ecuaciones de Euler:

La ecuación fundamental de la hidrodinámica (Bernoulli) se deduce de la ecuación de Euler.

Para deducir las ecuaciones de Euler estudiamos:

- A- Fuerzas que intervienen en el movimiento del fluido: suponemos un volumen de control que es atravesado por un fluido ideal en régimen permanente y movimiento irrotacional, por lo tanto las únicas fuerzas actuantes serán la de gravedad y la debida a una determinada presión.
- B- Componentes de la aceleración en un punto:

$$v_x = f(x, y, z, t), \quad v_y = f(x, y, z, t), \quad v_z = f(x, y, z, t)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Sabemos que $dv_x/dt =$ aceleración inercial + aceleración temporal:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) + \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} \frac{dt}{dt} \right)$$

Y si el régimen es permanente entonces:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0 = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial t}$$

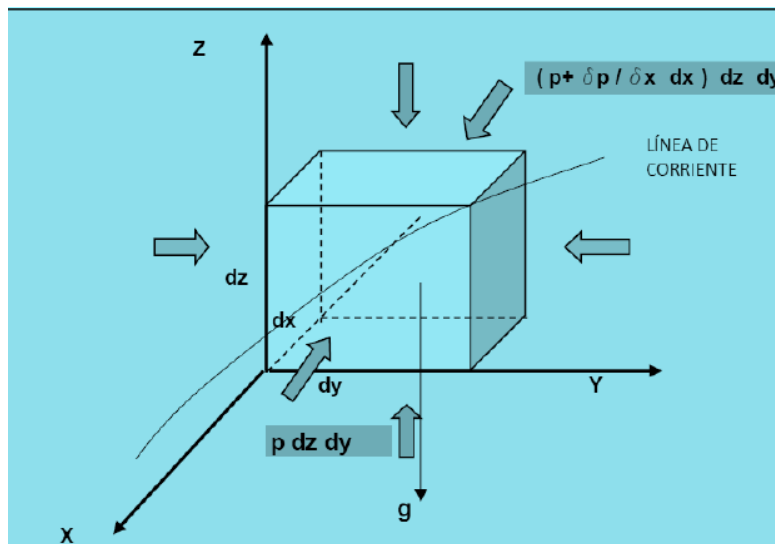
C- Aplicación de la segunda ley de Newton:

$$\sum F = m a$$

$$\sum F_x = m a_x, \quad \sum F_y = m a_y, \quad \sum F_z = m a_z$$

Ecuación de Euler:

Analizaremos la dirección X, un plano xz a la altura dy/2



$$\sum F_x = m a_x$$

$$P dz dy - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) dy dz + X \rho dx dy dz = \rho dx dy dz \frac{du}{dt}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz + X \rho dx dy dz = \rho dx dy dz \frac{du}{dt}$$

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + X \rho = \rho \frac{du}{dt}$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + X = \frac{du}{dt} \quad \text{Ecuación de Euler en la dirección de } x$$

(o línea de corriente paralela a dx)

En forma general:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + X = \frac{du}{dt}, \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + Y = \frac{dv}{dt}, \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + Z = \frac{dw}{dt}$$

La aceleración es una fuerza de mas $F/M=du/dt$, y la representamos como $X Y Z$.

Para nuestro caso donde solo consideramos la acción gravitatoria y la acción del gradiente de presión.

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + 0 = \frac{du}{dt}, \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + 0 = \frac{dv}{dt}, \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g = \frac{dw}{dt}$$

Ecuación de Bernoulli:

Una vez conocidas las ecuaciones de Euler pasamos a determinar la ecuación de Bernoulli. Se supone que esta la podemos obtener integrando directamente a partir de la ecuación de Euler

$$0 = \frac{dP}{\rho} + g dz + w dw$$

Sin embargo nosotros aplicaremos otro método igual de preciso que consiste en multiplicar cada ecuación de Euler por su correspondiente dx , dy , dz y luego sumar miembro a miembro:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} dx - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} dy - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} dz - g dz = \frac{du}{dt} dx + \frac{dv}{dt} dy + \frac{dw}{dt} dz$$

Operamos matemáticamente:

$$-\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) - g dz = u du + v dv + w dw$$

$$-\frac{1}{\rho} dP - g dz = \frac{1}{2} d(u^2 + v^2 + w^2)$$

$$-\frac{1}{\rho} dP - g dz = \frac{1}{2} d(v^2)$$

$$\frac{dP}{\rho} + g dz + \frac{1}{2} d(v^2) = 0$$

Ecuación de Bernoulli para fluido ideal

y flujo permanente a lo largo de una línea de corriente

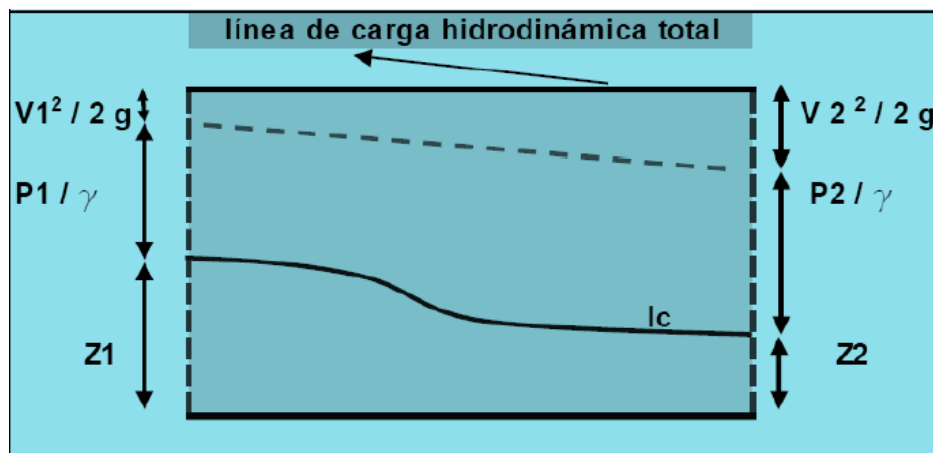
La ecuación de Bernoulli establece la conservación de la energía mecánica entre cualquier par de puntos de una línea de corriente.

$$\int_1^2 \frac{dP}{\gamma} + \int_1^2 dz + \int_1^2 \frac{1}{2g} d(v^2) = 0 \rightarrow \frac{P_1 - P_2}{\gamma} + (z_2 - z_1) + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}$$

Por lo tanto concluimos que a lo largo de una línea de corriente la suma de energías debidas a la presión, a la altura, y a la velocidad, en cierto punto 1 debe ser igual a la suma de las mismas en cierto punto 2, o se que se conserva la energía, y si el fluido es ideal incompresible (o compresible) el balance debe ser nulo (si no se tiene en cuenta la fricción).

A la suma $P/\gamma + z + v^2/2g = \text{cte} = H$, se le llama altura de carga hidrodinámica total y se mide en energía por unidad de peso, por ejemplo kgfm/kgf ó m.

Se representa la línea de carga ideal:



Debido a la viscosidad μ , la línea de carga de un fluido real, no es horizontal.

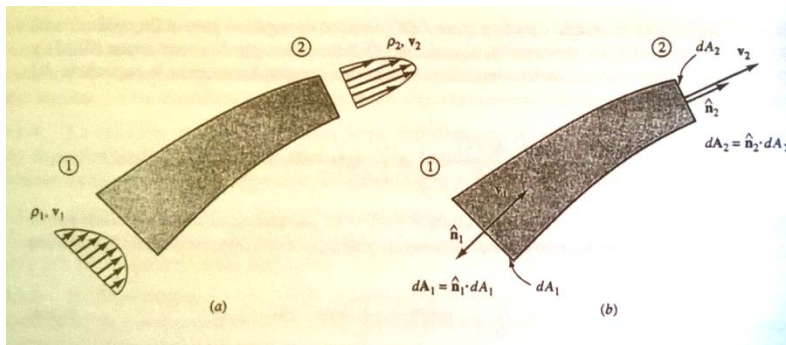
Ecuación de energía:

Es el principio de conservación de la energía tratado en Termodinámica, que indica que la energía no se crea ni se destruye, solo se transforma por lo tanto $E_1 + W - h_L - E_{\text{extraída}} = E_2$; este concepto debe tenerse en cuenta en la ecuación de Bernoulli.

Ecuación básica: $Q_H - W = E_2 - E_1$ 1° Ley de la Termodinámica, establece que el calor Q_H añadido a un sistema menos el trabajo hecho sobre el sistema, depende únicamente de los estado inicial y final del sistema (independiente de la trayectoria), por lo tanto E es una propiedad de sistema mientras que Q_H y W son solo fenómenos transitorios.

La ecuación de conservación de energía como sabemos debe tener en cuenta las fuentes, intercambios y disipación de energía en todas sus formas, flujo viscoso.

Flujo Permanente:



Consideramos $N = E$ y $n = e$ entonces

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{VC} e \rho dV + \int_{SC} e \rho v dA$$

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{VC} e \rho dV + \int_{SC} e \rho v dA$$

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW_s}{dt} = \int_{SC} \left(\frac{P}{\rho} + e \right) \rho v dA$$

$$\frac{dQ_H}{dt} - \frac{dW_s}{dt} = - \int_{SC_1} \left(\frac{P_1}{\rho_1} + e_1 \right) \rho_1 v_1 dA_1 + \int_{SC_2} \left(\frac{P_2}{\rho_2} + e_2 \right) \rho_2 v_2 dA_2$$

Finalmente

$$\frac{dQ_H}{dt} + \left(\frac{P_1}{\rho_1} + \left(gz_1 + \frac{v_1^2}{2} + u_1 \right) \right) \rho_1 v_1 dA_1 = \frac{dW_s}{dt} + \left(\frac{P_2}{\rho_2} + \left(gz_2 + \frac{v_2^2}{2} + u_2 \right) \right) \rho_2 v_2 dA_2$$

Si el flujo es constante $\rho_1 v_1 dA_1 = \rho_2 v_2 dA_2$ entonces reagrupando

$$-q_H + \left(\frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1} \right) + \left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right) + g(z_2 - z_1) + (u_2 - u_1) = 0$$

Y reduciendo el volumen de control a un punto, nos queda:

$$\frac{dP}{\rho} + g dz + v dv + du - dq_H = 0$$

Que es otra forma de la 1° Ley de la Termodinámica:

$$\frac{dP}{\rho} + g dz + v dv + \left(du + p d\frac{1}{\rho} - dq_H \right) = \frac{dP}{\rho} + g dz + v dv + (Tds - dq_H) = 0$$

Que si el flujo es sin fricción, los tres primeros términos son nulo según Euler, entonces:

$$dq_H = du + p d\frac{1}{\rho}$$

Y si además el flujo es reversible (2° Ley de Termodinámica): $Tds \geq dq_H$

$$T ds \geq du + p d\frac{1}{\rho}$$

Luego las pérdidas $h_{L1-2} = Tds - dq_H$

Retomando e integrando la ecuación:

$$\frac{dP}{\rho} + g dz + v dv + (Tds - dq_H) = 0$$

$$\frac{dP}{\rho} + g dz + v dv + (h_{L1-2}) = 0$$

$$\frac{P_1}{\rho_1} + g z_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{P_2}{\rho_2} + g z_2 + \frac{v_2^2}{2} - W + h_{L1-2}$$

Ecuación de la cantidad de movimiento:

Se utiliza la segunda ley de Newton como base para determinar la ecuación de momentum lineal, sea $N = mv$ y $n = \rho v / \rho$, entonces:

$$F = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho v dV + \int_{SC} v \rho v dA$$

Es decir que la suma vectorial de las fuerzas externas reales aplicadas que actúan sobre el volumen de control, es igual a la tasa temporal de incremento del momentum lineal dentro del volumen de control más la tasa neta a la cual el momentum está dejando la superficie de control.

Análisis:

Termino Izquierda: $F = \sum F$, resultante de fuerzas.

Termino de la derecha $\int_{SC} v \rho v dA = M_1 + M_2$ resultante de momentos

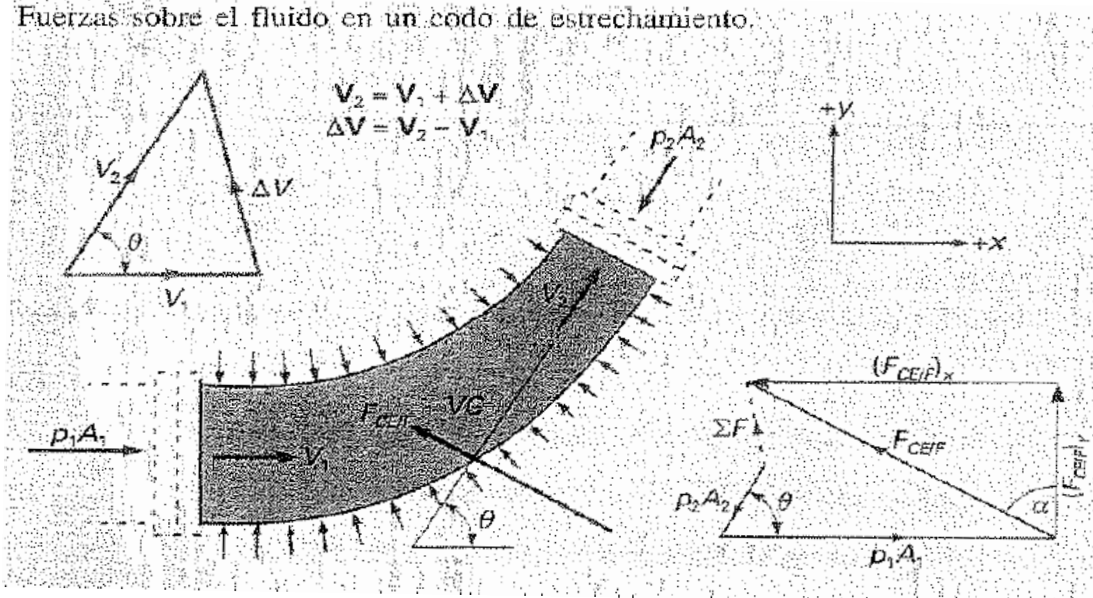
$$\begin{aligned} & - \int_{SC_1} v_1 \rho_1 v_1 dA_1 + \int_{SC_2} v_2 \rho_2 v_2 dA_2 \\ & - v_1 (\rho_1 v_1 A_1) + v_2 (\rho_2 v_2 A_2) \end{aligned}$$

Finalmente la ecuación general de momentum lineal para un fluido ideal en régimen permanente es:

$$\sum F = \rho Q (v_2 - v_1)$$

Aplicación: Calculo del soporte de un codo de cañería:

Fuerzas sobre el fluido en un codo de estrechamiento.



$$\sum F_x = \rho Q (v_{2x} - v_{1x}) = P_1A_1 - F_x - P_2A_2 \cos \theta$$

$$\sum F_y = \rho Q (v_{2y} - v_{1y}) = F_y - P_2A_2 \sin \theta$$

Luego,

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad y \quad \alpha = \arctg \frac{F_x}{F_y}$$

Siendo:

$$F_x = P_1A_1 - P_2A_2 \cos \alpha - \rho Q (v_{2x} - v_{1x})$$

$$F_y = \rho Q (v_{2y} - v_{1y}) + P_2A_2 \sin \alpha$$

Entonces un cambio en la dirección de la tubería causa fuerzas que se ejercen sobre la línea provocando algún desplazamiento, a menos que la curva o el codo se encuentren anclados. Estas fuerzas se deben tanto a la presión estática en la línea como a las reacciones dinámicas en la corriente curvada del fluido.

Aplicaciones y limitaciones de los principios fundamentales de los fluidos reales e ideales, compresibles e incompresibles

Tuberías inclinadas

Tuberías con proceso isotérmico o isoentrópico

Determinación de caudal de embalse

Determinación de velocidad de un cuerpo en un fluido

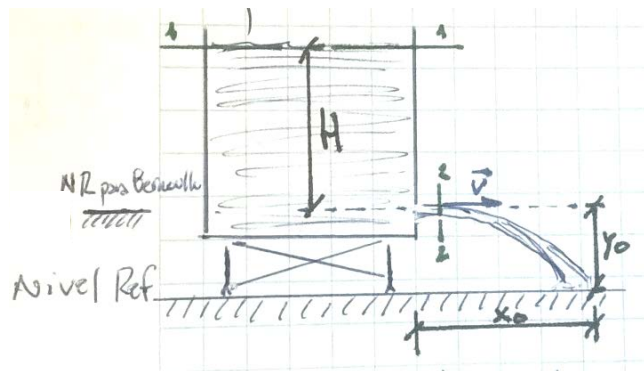
Calculo de soportes, bridas, etc

Aplicación de Bernoulli

Orificio de un embalse (ecuación de Torricelli):

Se utiliza para medir el caudal de salida de un depósito, e indirectamente su velocidad, el orificio puede hacerse en la pared o en el fondo del depósito. En el orificio de bordes agudos el chorro de fluido se contrae a lo largo de una corta distancia de alrededor de medio diámetro aguas debajo de la abertura. El área de la sección transversal donde la contracción es máxima se conoce como vena contracta. Las líneas de corriente en esta sección son paralelas y la presión es la atmosférica. La cabeza H se mide desde el centro del orificio hasta la superficie libre. Se supone que la cabeza se mantiene constante.

Aplicamos Bernoulli entre 1 y 2:



$$\frac{P_{atm}}{\gamma} + H + 0 = \frac{P_{atm}}{\gamma} + 0 + \frac{v_2^2}{2g} \rightarrow v_{2t} = \sqrt{2gH}$$

La ecuación de Torricelli establece que la velocidad del flujo de salida es igual a la velocidad de caída libre desde la superficie del embalse. Esta velocidad calculada es teórica, la velocidad real es:

$$v_{2r} = C_v v_{2t}$$

El caudal real es el producto de la velocidad real y el área del chorro ($C_c = A_2/A_0$ coeficiente de contracción):

$$Q_{2r} = v_{2r} A_2 = C_v v_{2t} C_c A_o = C_d A_o \sqrt{2 g H}$$

Siendo $C_d = C_c C_v$ el coeficiente de descarga.

C_v se determina experimentalmente y vara entre 0,95 y 0,97

C_c se determina experimentalmente

C_d se determina midiendo A_o, H, Q_r entonces $C_d = Q_r / (A_o \sqrt{2gh})$, luego conociendo C_v se calcula $C_c = C_d / C_v$

Trayectoria: determinamos la distancia x_o que alcanza el chorro desde la pared. Sabemos:

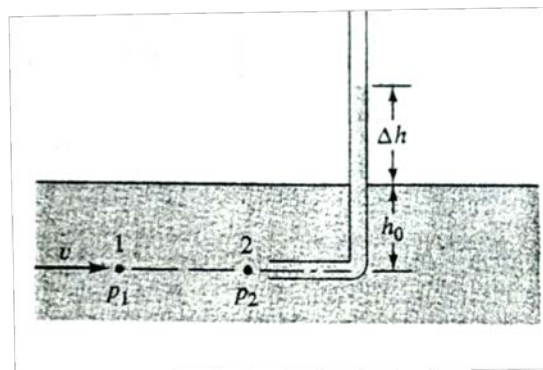
$$v_{2r} = \frac{x_o}{t} \text{ y ademas } y_o = y_i + v_y t + \frac{1}{2} g t^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2} g t^2 \text{ entonces } x_o = v_{2r} \sqrt{\frac{2y_o}{g}}$$

Mas adelante seguiremos con otros métodos útiles para determinar caudales como ser el caso del medidor Venturi, Placa orificio, Toberas, etc.

Medición de velocidad (tubo de Pitot y Tubo de Prandtl)

La medición de la magnitud y dirección de la velocidad es muy importante porque podemos determinar la tasa de flujo de volumen o de masa en cierta sección transversal atravesada por cierto fluido. Estas mediciones generalmente son flujos simples, sino debe recurrirse a un mayor grado de precisión. Dichas mediciones simples se realizan con aparatos electromecánicos localizados directamente en el campo del flujo, estos aparatos registran la magnitud total de la velocidad $v = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ en un punto y la dirección del vector v (velocidad total).

Tubo Pitot: es un modo exacto y durable para medir la velocidad. Se usa un tubo de vidrio a 90° cuya abertura se dirige hacia arriba de tal manera que el fluido fluye hacia la abertura hasta que la presión en el tubo alcanza valores suficientemente altos como para frenar el impacto de la velocidad contra él. Directamente sobre la abertura el fluido se encuentra en reposo, la línea de corriente que va de 1 a 2 (punto de estancamiento, pues allí en 2 el fluido esta en reposo, y el resto de fluido se divide y circula alrededor del tubo)



Aplicamos Bernoulli entre 1 y 2:

$$\frac{P_1}{\gamma} + z + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + z + 0 \rightarrow h_0 + \frac{v_1^2}{2g} = h_0 + \Delta h \rightarrow v_1 = \sqrt{2g \Delta h}$$

El tubo de Pitot mide la presión de estancamiento la cual se conoce también como presión total, la cual está compuesta por dos partes, la presión estática h_0 , y la presión dinámica Δh .

Aplicación: mide la velocidad de un fluido o la de un objeto que se desplace respecto de ese fluido, por ejemplo medir la velocidad de un avión respecto al aire circundante.

Tubo de Pitot y Prandtl: combinando las mediciones de la presión estática (tubo piezométrico) y la medición de la presión total (tubo de Pitot), se obtiene la cabeza de presión dinámica.

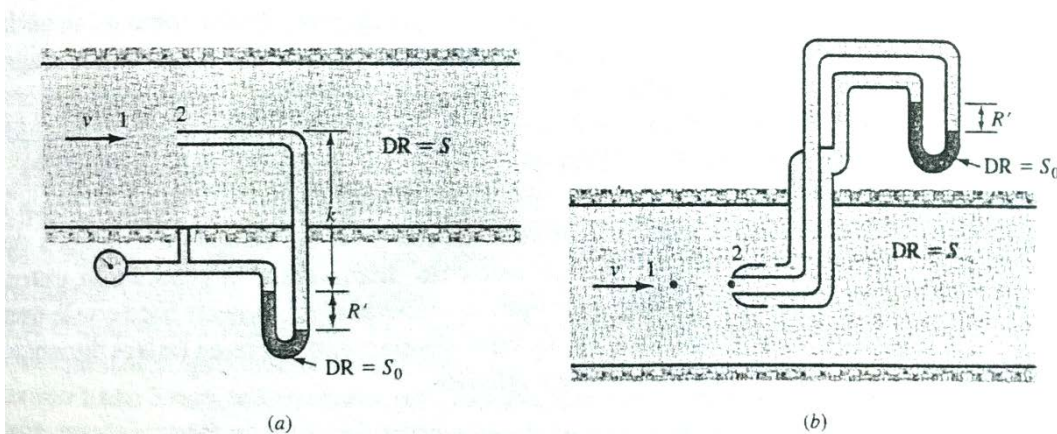


Figura 10.7 Medición de la velocidad. (a) Tubo de pitot y abertura piezométrica. (b) Tubo de pitot estático.

Aplicamos Bernoulli entre 1 y 2:

$$\frac{P_1}{\gamma} + z + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + z + 0 \rightarrow h_0 + \frac{v_1^2}{2g} = h_0 + \Delta h \rightarrow \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma}$$

Ahora determinamos la ecuación de manómetro diferencial, sabemos que $P_{A''} = P_B$

$$P_{A''} = P_1 + \gamma h_k + \gamma' h_R$$

$$P_{B'} = P_2 + \gamma (h_k + h_R)$$

Igualando y operando matemáticamente:

$$P_1 + \gamma h_k + \gamma' h_R = P_2 + \gamma (h_k + h_R)$$

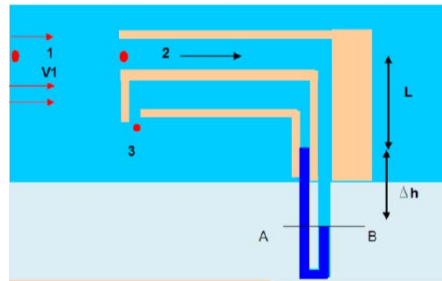
$$P_1 + \gamma h_k + \gamma' h_R - \gamma (h_k + h_R) = P_2$$

$$\frac{P_2 - P_1}{\gamma} = h_R \left(\frac{\gamma'}{\gamma} - 1 \right)$$

Finalmente:

$$v = \sqrt{2 g h_R \left(\frac{\gamma'}{\gamma} - 1 \right)}$$

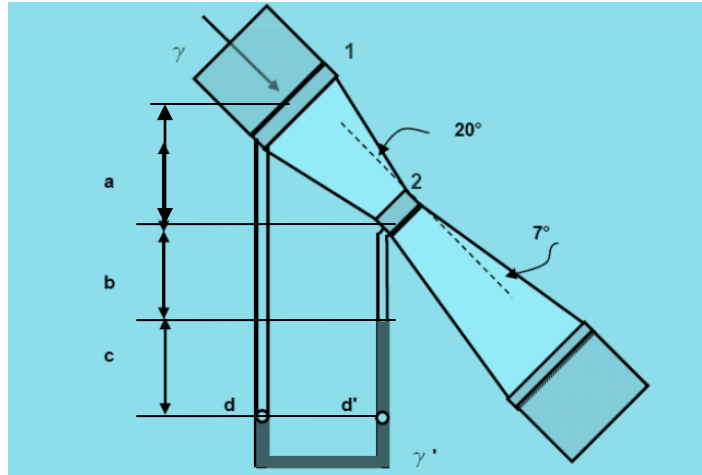
Esta combinación se suele llamar Tubo de Pitot Estático, que tiene como diseño particular un tubo de con nariz redondeada llamada Tubo de Prandtl que elimina las perturbaciones debidas a la nariz y al brazo, y tiene idénticas expresiones:



Medición de caudal (Tubo de Venturi, Tobera y placa orificio)

Se utiliza para medir la tasa de flujo en una tubería. Generalmente es una pieza fundida que consta de las siguientes partes:

- 1- Una porción aguas arriba, la cual tiene el mismo tamaño de la tubería, tiene un revestimiento en bronce y un anillo piezométrico.
- 2- Un régimen convergente
- 3- Una garganta cilíndrica con revestimiento de bronce que contiene un anillo piezométrico.
- 4- Una región cónica gradualmente divergente que desemboca en una sección cilíndrica del tamaño de la tubería. Un manómetro diferencial conecta los dos anillos piezométricos. El tamaño del medidor Venturi se especifica por el tamaño del diámetro de la cañería y el diámetro de la garganta (por ej 6"x4"). Para obtener resultados acertados el medidor debe ser precedido de una cañería recta de al menos 10 diámetros. En la garganta la velocidad aumenta y la presión disminuye, luego si el flujo es incompresible, $Q = f_c (\Delta h \text{ man})$



Aplicamos Bernoulli entre 1 y 2:

$$\frac{P_1}{\gamma} + a + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + 0 + \frac{v_2^2}{2g} \quad \rightarrow \quad \frac{P_1 - P_2}{\gamma} + a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}$$

Por ecuación de continuidad:

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} + a = \frac{v_2^2}{2g} \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]$$

Despejamos la velocidad:

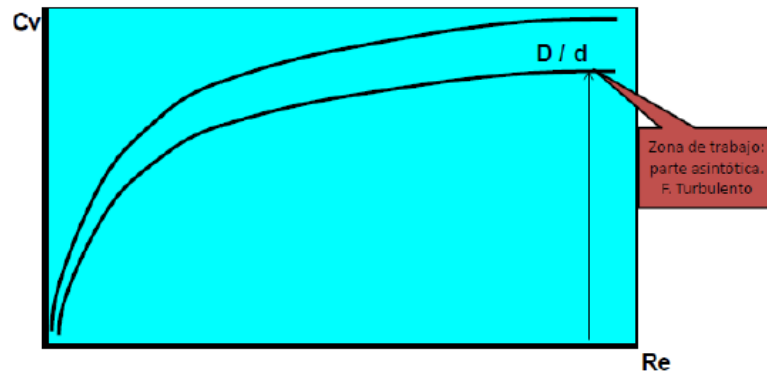
$$v_{2t} = \sqrt{\frac{2g \left(\frac{P_1 - P_2}{\gamma} + a \right)}{\left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]}} \quad \rightarrow \quad v_{rt} = C_v v_{2t}$$

Luego el caudal real será:

$$Q_{2r} = C_d A_o \sqrt{\frac{2g \left(\frac{P_1 - P_2}{\gamma} + a \right)}{\left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]}}$$

$$V_2 r = C_v V_{2t}$$

C_v : coeficiente de velocidad, función del Nº de Re



Para simplificar la ecuación de velocidad, marcamos en el manómetro d y d', que por principio de la hidrostática $P_d = P_{d'}$

$$P_d = P_1 + \gamma a + \gamma b + \gamma c$$

$$P_{d'} = P_2 + \gamma b + \gamma' c$$

Igualando y operando matemáticamente:

$$P_1 + \gamma a + \gamma b + \gamma c = P_2 + \gamma b + \gamma' c$$

$$P_1 + \gamma (a + c) = P_2 + \gamma' c$$

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} + a = c \left(\frac{\gamma'}{\gamma} - 1 \right)$$

Entonces reemplazamos en la ecuación de velocidad con lo que facilitamos el uso de dicha ecuación pues " c "= Δh es una medida directa (a diferencia de " a "), que la obtenemos del manómetro diferencial.

Finalmente:

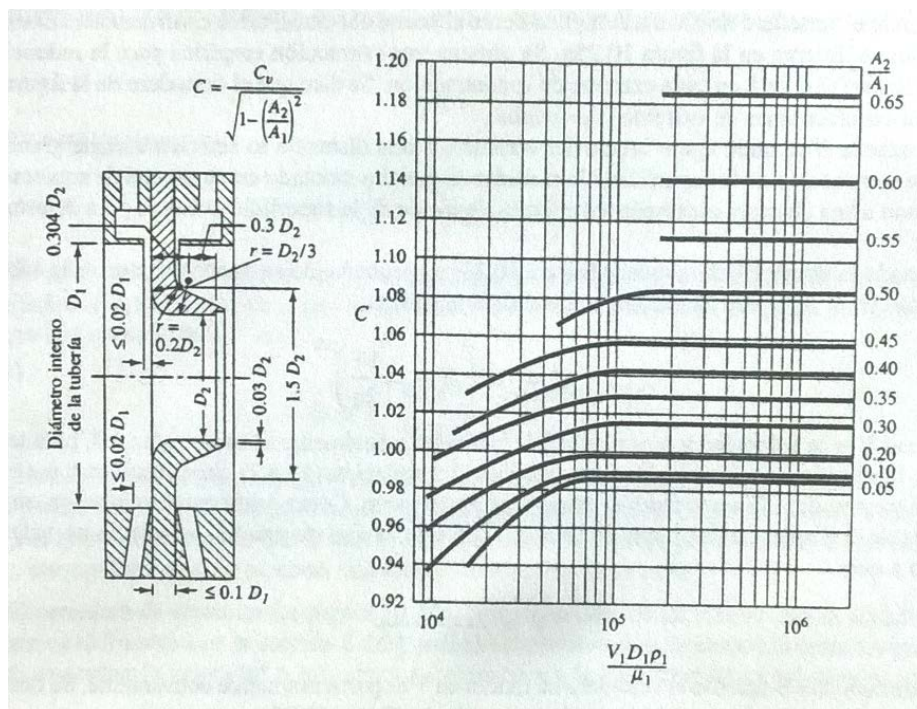
$$v = \sqrt{\frac{2 g c \left(\frac{\gamma'}{\gamma} - 1 \right)}{\left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]}} \rightarrow v_{rt} = C_v v_{2t}$$

Luego el caudal real será:

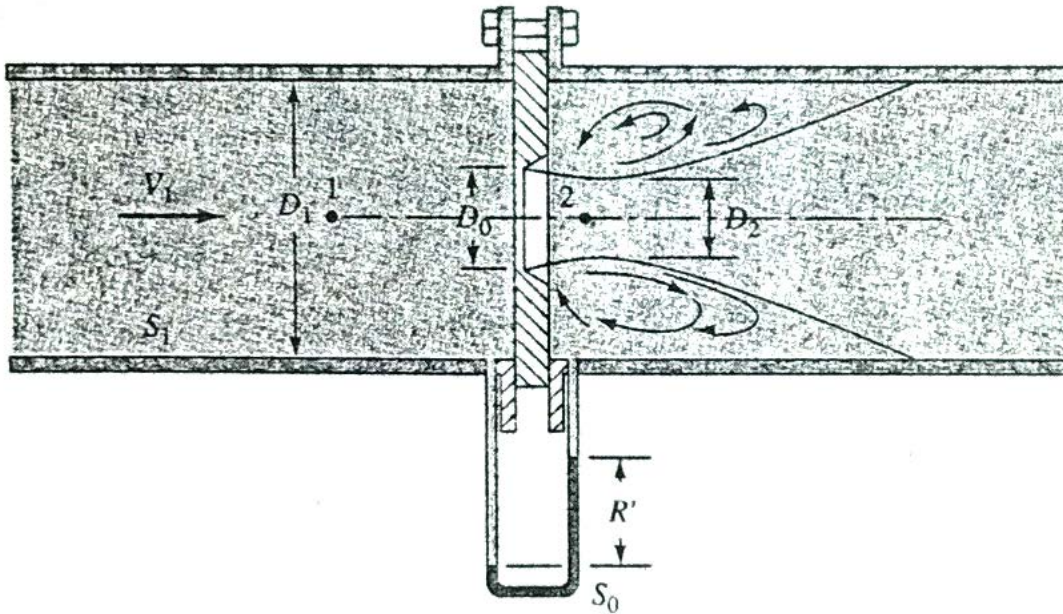
$$Q_{2r} = C_d A_o \sqrt{\frac{2 g c \left(\frac{\gamma'}{\gamma} - 1\right)}{\left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]}}$$

Tobera: son mas económicas que los Venturi (estos se usan en instalaciones donde no hay recambios de cañerías), las palcas orificos y toberas se usan en instalaciones en las que se recambian las tuberías, pues estos medidor van entre bridas. Una tobera es una boquilla estrecha dispuesta en una tubería que sirve para transformar la presión del fluido en velocidad. Una tobera es un medidor Venturi en tramo divergente (mas económica) pero al variar bruscamente la sección las pérdidas de energía son mayores. Se aplican las mismas ecuaciones del medidor Venturi, solo que ahora h (o sea "a") es nulo pues la tubería es horizontal.

$$Q_{2r} = C_d A_o \sqrt{\frac{2 \frac{\Delta P}{\rho}}{\left[1 - \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4\right]}}$$



Placa orificio: son más económicas que las toberas e introducen más pérdidas.



INFLUENCIA DE LA VISCOSIDAD

TEMA 5

Tema 5 – Influencia de la viscosidad

Trataremos fluidos reales, es decir situaciones en las que las irreversibilidades son importantes. La viscosidad es la propiedad del fluido que causa los esfuerzos de corte durante el movimiento, provocando pérdidas por fricción.

Número de Reynolds:

Régimen laminar: es aquel en el que el fluido se mueve en capas o laminas que se deslizan suavemente una sobre otra adyacente, únicamente con intercambio molecular de momentum, cualquier inestabilidad o turbulencia se ve atenuada por los fenómenos viscosos ($Re \leq 2000$).

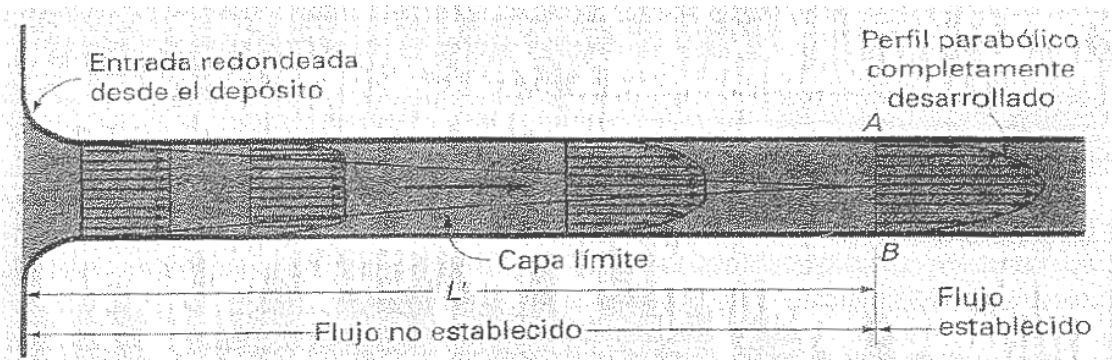
Régimen turbulento: es aquel en el que las partículas del fluido siguen un movimiento errático con intercambio de momentum transversal violento ($Re \geq 10000$)

Flujos internos: flujo en región cerrada

Flujos externos: flujo en región sin fronteras

El movimiento de fluidos esta significativamente influenciado por la presencia de fronteras. Las partículas en contacto con la pared permanecen en reposo respecto de ella. En el campo de flujo existe un gradiente de velocidad desde la pared (región de la capa limite), una fuerza cortante retardadora se aplica al fluido en la pared y la capa limite es la región donde los esfuerzos cortantes son importantes. Veamos esta influencia de la frontera a la entrada de una tubería:

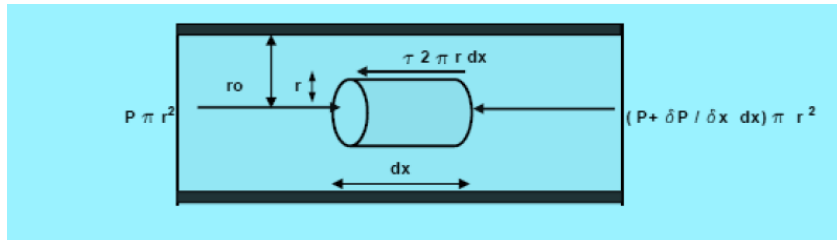
Establecimiento del flujo laminar



En la sección A-A cerca de la entrada bien redondeada el perfil de velocidad es casi uniforme a través de la sección transversal. La acción de τ es retardar al fluido que está cerca de la pared por lo tanto la velocidad solo se incrementa en el centro de la tubería, luego la longitud de transición es $L' = 0,058 Re D$, el perfil de velocidad es fijo. Si el flujo es externo, los efectos friccionales de la capa limite están confinados a la superficie del cuerpo.

Deducción de la ecuación de Hagen-Poiseuille:

Consideramos un régimen laminar que se desarrolla dentro de una tubería de sección circular de radio r_0 . Dentro de ella tomamos un tubo de corriente como una hoja cilíndrica infinitesimal. Se aplica la ecuación de movimiento (2da ley de Newton) para aceleración nula:



$$P \pi r^2 - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) \pi r^2 - \tau 2 \pi r dx = 0$$

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial x} dx \right) \pi r^2 = \tau 2 \pi r dx$$

$$\tau = -\frac{r}{2} \frac{\partial P}{\partial x}$$

Vemos que la distribución de esfuerzo de corte sigue una línea recta.

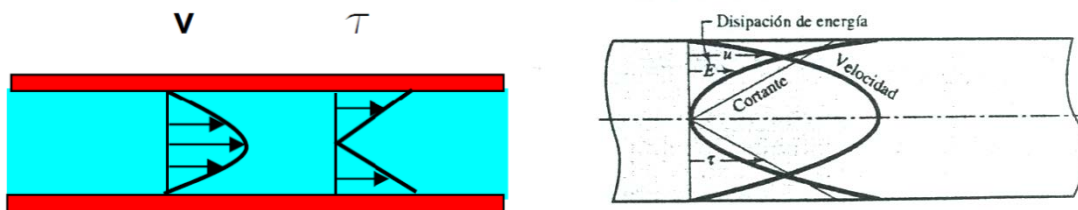
Igualando la ecuación obtenida de τ con la ley de Newton de la viscosidad, determinamos la distribución de velocidades

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dr} = -\frac{r}{2} \frac{\partial P}{\partial x} \text{ integrando } \int_1^2 dv = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \int_1^2 r dr \text{ nos queda } v = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial x} r^2 + cte$$

Finalmente

$$V = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial x} (r_0^2 - r^2)$$

Con lo que el perfil de velocidades sigue una parábola



Vemos que sobre el eje de la tubería la velocidad es máxima y el esfuerzo de corte es nulo.

Ecuación de Hagen Poiseuille – Análisis únicamente horizontal:

Según lo perfiles diagramados sacamos una primera conclusión: $V_{max(r=0)} = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial x} r_o^2$

Y la media es $V_{med} = \frac{1}{2} V_{max}$, entonces: $V_{med} = -\frac{1}{8\mu} \frac{\partial P}{\partial x} r_o^2$

Demostración:

$$Q = V_m \pi r_o^2 = \int_0^{r_o} v \cdot 2\pi r \, dr$$

$$Q = V_m \pi r_o^2 = \int_0^{r_o} -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial x} (r_o^2 - r^2) \cdot 2\pi r \, dr$$

$$V_m \pi r_o^2 = \int_0^{r_o} \left(-\frac{1}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial x} r_o^2 + \frac{1}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial x} r^2 \right) \cdot 2\pi r \, dr$$

$$V_m \pi r_o^2 = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial x} r_o^2 \cdot 2\pi \int_0^{r_o} r \, dr + \frac{1}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \cdot 2\pi \int_0^{r_o} r^3 \, dr$$

$$V_m \pi r_o^2 = -\frac{\pi}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \left(\frac{r_o^4}{2} - \frac{r_o^4}{4} \right)$$

$$V_m \pi r_o^2 = -\frac{\pi}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \left(\frac{r_o^4}{4} \right)$$

$$V_m = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \left(\frac{r_o^2}{4} \right)$$

$$V_m = -\frac{1\pi}{8\mu} \frac{\partial P}{\partial x} r_o^2 \quad \text{Ecuación Hagen Poiseuille}$$

Por lo tanto el caudal será:

$$Q = -\frac{1}{8\mu} \frac{\partial P}{\partial x} r_o^2 \cdot (\pi r_o^2) = \frac{\pi}{128\mu} \frac{\Delta P}{L} D^4 \quad (\text{únicamente horizontal})$$

La caída de presión (perdida ΔP) en la longitud L convenimos en pasarla de derivadas parciales en la dirección del eje X a la derivada total en dicha dirección. Luego integramos:

$$V_m = -\frac{1\pi}{8\mu} \frac{\partial P}{\partial x} r_o^2 \quad \longrightarrow \quad \int_{P_1}^{P_2} dP = -\int_0^L 8\mu \frac{V_m}{r_o^2} \, dx \quad \longrightarrow \quad \Delta P = \frac{8\mu V_m L}{r_o^2}$$

Otras formas de la Ecuación de Hagen son:

$$\Delta P = \frac{128 \mu Q L}{\pi D^4}$$

$$\Delta P = \frac{32 \mu V_m L}{D^2}$$

Se puede ver que las pérdidas varían directamente con la viscosidad, la longitud, y el caudal, e inversamente con la cuarta potencia del diámetro de la tubería. Hay que remarcar que no se ha tenido en cuenta la rugosidad.

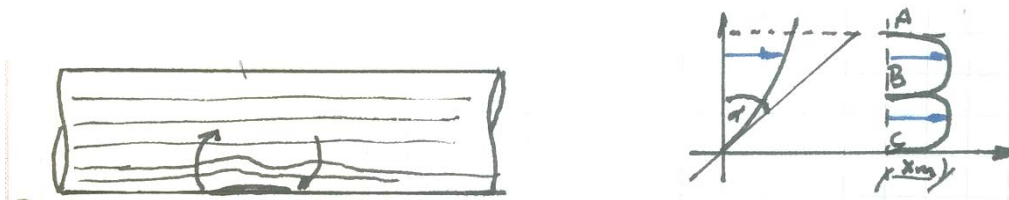
La potencia de la bomba que impulsara al fluido por la tubería:

$$N = \Delta P Q \text{ (W)} \quad \text{ó} \quad N = \gamma Q H / \eta \text{ 75 (C.V.)}$$

Experiencia de Reynolds – Inestabilidad del Régimen Laminar

Como ya vimos Reynolds, utilizo un tanque, una tubería y una inyección de colorante; y vio que a medida que aumentaba la velocidad del fluido el colorante pasaba de líneas rectas a onduladas hasta mezclarse totalmente con el fluido.

Régimen laminar: si en una tubería donde las líneas de corrientes son rectas (régimen laminar) y por algún motivo una de estas líneas se curva (rugosidad de la tubería), entonces se produce un acercamiento hacia otra línea de corriente adyacente, variando la velocidad y por lo tanto su cantidad de movimiento, de modo que ganara fuerza (cupla) que tendera a aumentar la turbulencia. Esta inestabilidad, se ve amortiguada por fuerzas viscosas que resisten el movimiento relativo de las capas adyacentes.



Definimos factor de inestabilidad $X = y^2 \frac{dv}{dy} \frac{\rho}{\mu}$ cuanto menor sea X, mas estable será el movimiento.

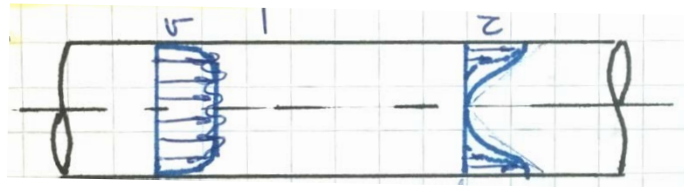
Régimen turbulento: sabemos que este tipo de régimen se caracteriza por grandes valores del numero de Reynolds, por lo tanto uno o todos los valores del numerador (fuerzas inerciales) son

grandes respecto al denominador (fuerzas cortantes viscosas), por lo tanto la inestabilidad X es de valor apreciable, y la viscosidad no puede reducir los efectos remolino.

$$\frac{Fi}{F\mu} = \text{número de Reynolds} = \frac{\rho L V}{\mu}$$

Viscosidad de remolino – Régimen turbulento

Sabemos que cuando superamos $Re > 2000$ las líneas de flujo se ondulan y para altos valores Re se producen gran turbulencia e inestabilidad, entonces para tratar el tema consideraremos la corriente de un fluido poco viscoso (por ej. Agua) a gran velocidad que circula por una tubería de sección grande por lo tanto este movimiento en régimen permanente lo llamaremos movimiento turbulento. ($Fi \gg Fu$). Dicho movimiento es caótico, donde la trayectorias se cruzan generando remolinos aperiódicos con intercambio violento de cantidad de movimiento transversal.



La distribución de velocidades en la tubería de sección constante es logarítmica por lo tanto vemos que es más uniforme que en régimen laminar. La disipación de energía es mayor que en régimen laminar, ya que al formarse remolinos se producen esfuerzos de corte adicional que incrementa las pérdidas de energía, por lo tanto se puede considerar al movimiento turbulento como un movimiento de velocidad media que se le superpone un movimiento variable en forma de remolinos. ($\tau_{\text{turbulento}} = \tau_{\text{laminar}} + \tau_{\text{remolino}}$)

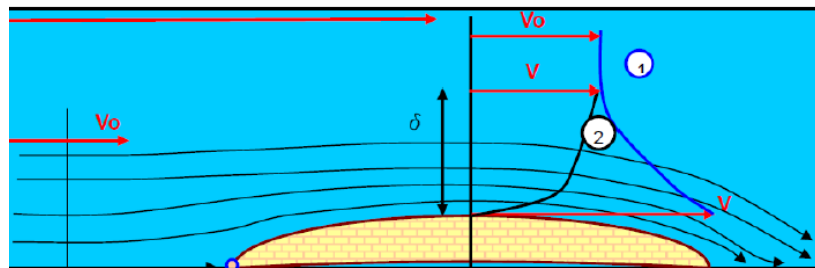
$$\tau_{\text{turb}} = \mu \frac{dv}{dy} + n \frac{dV}{dy}$$

Hipótesis Boussnesq: la viscosidad de remolino no es una propiedad del fluido sino que varía con el tiempo y espacio, y varía para cada flujo. Por lo general en flujo turbulento $n \gg \mu$. En cambio μ es una propiedad del fluido.

Teoría de la capa límite – Resistencia Superficial

Como hemos venido adelantando, sabemos que ocurren ciertos fenómenos a medida que un fluido se desliza sobre la superficie o contorno de un objeto, ya sea una placa plana, el interior de una tubería, un cuerpo sumergido que se mueve dentro de cierto fluido, etc.

Prandtl desarrollo el concepto de “capa límite” con el que se pudo vincular los fluidos reales con los ideales; para fluidos que tienen viscosidad relativa pequeña, el efecto de fricción interna es apreciable en una pequeña región que rodea la frontera del fluido, por lo tanto cerca de la frontera sólida, por fuera de dicha región angosta puede considerarse como flujo ideal (no perturbado).

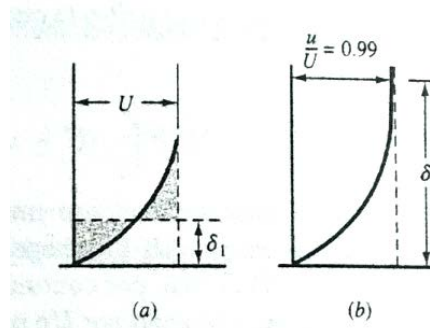


Flujo Uniforme no perturbado por el objeto

Descripción de la capa límite

Cuando empieza el movimiento de fluido con viscosidad muy pequeña, el flujo es irrotacional. Sabemos que el fluido tiene velocidad relativa cero cerca de la frontera, y que hay un elevado gradiente de velocidad hacia el flujo principal, este gradiente origina grandes τ , cerca de la frontera en la zona que llamamos capa límite, de espesor muy delgado. Dicho espesor aumenta cuando el cuerpo comienza a moverse en el fluido. El gradiente de presión (relacionado con el momentum) disminuye aguas abajo. Para fronteras lisas aguas arriba, la capa límite empieza como una capa laminar dentro de la cual las partículas de fluido se mueven en capas lisas. A medida que la capa límite aumenta su espesor se vuelve inestable y finalmente se transforma en una capa límite turbulenta en la cual las partículas de fluido se mueven en trayectorias aleatorias a velocidad reducida, sin embargo cerca de la frontera sigue habiendo una capa muy delgada laminar (subcapa laminar).

Definición de espesor δ , es el desplazamiento del flujo principal debido a la desaceleración de las partículas de fluido en la zona de frontera. Este espesor es conocido como espesor de desplazamiento y se expresa:
$$U\delta_1 = \int_0^\delta (U - u) dy$$
 donde δ es el valor de “y” para $u=U$ en flujo no perturbado.



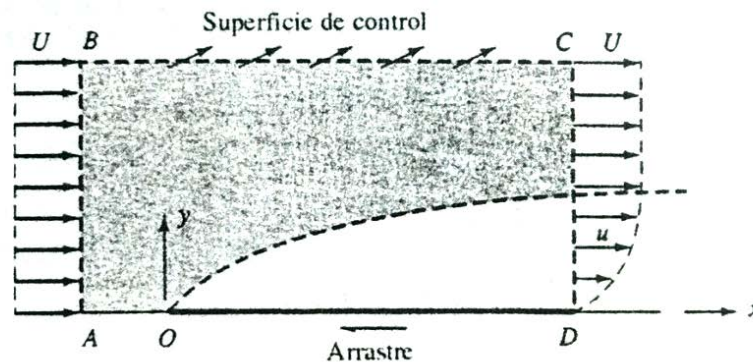
Entonces de acuerdo a la definición anterior “ $3 \delta_1$ ” es la distancia que el flujo principal debe alejarse de la frontera para no sentir los efectos de la capa límite.

Otra definición sería δ es la distancia donde $u/U=0,99$, es decir donde la velocidad perturbada y no perturbada son aproximadamente iguales.

Ecuación de momentum aplicada a la capa limite

Flujo Permanente:

Consideramos una placa plana sobre la que se desplaza cierto flujo permanente, se toma un volumen de control por encima de la placa, de altura h (corresponde a U velocidad no perturbada) y largo X sobre la placa.



$$\sum F_x = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho u dV + \int_{SC} \rho u v dA = \rho Q (U_2 - U_1) \text{ en la dirección } x$$

$$\text{Arrastre} = \rho \int_0^h u^2 dy - \rho U^2 h + U \rho \int_0^h (U - u) dy \quad \text{pues } Q_{AB} = Q_{CD}$$

$$\text{Arrastre} = \rho \int_0^h (U - u) dy \quad \text{y como arrastre} = \int_0^x \tau dx$$

$$\tau = \rho \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u (U - u) dy$$

Capa límite laminar:

Prandtl supuso lo siguiente

$$\frac{u}{U} = F = \frac{3}{2} \eta - \frac{\eta^3}{2} \quad \text{para } 0 \leq y \leq \delta \quad \text{y } F = 1 \text{ si } y \geq \delta \quad \text{siendo } \eta = y/\delta$$

Se describe la ecuación de arrastre $\tau = 0,139 \rho U^2 \frac{d\delta}{dx}$

En la frontera $\tau = \frac{3}{2} \mu \frac{U}{\delta}$ igualando $\delta d\delta = 10,78 \frac{\mu dx}{\rho U}$ integramos y nos queda

$$\frac{\delta^2}{2} = 10,78 \frac{\mu}{\rho U} x \quad \text{reordenando} \quad \frac{\delta}{x} = 4,65 \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} = \frac{4,65}{\sqrt{Re_x}}$$

Siendo Re_x el número de Reynolds en la dirección x desde el borde de ataque. Esta ecuación para el espesor de la capa límite laminar muestra que δ se incrementa con la raíz cuadrada de la distancia al borde de ataque. Sustituyendo el valor de δ en la ecuación $\tau = \frac{3}{2} \mu \frac{U}{\delta}$

$$\tau = 0,322 \sqrt{\frac{\mu \rho U^3}{x}}$$

Y como el arrastre es, $\text{arrastre} = \int_0^1 \tau dx = 0,644 \sqrt{\mu \rho U^3 L}$

O en forma general (luego de multiplicar y dividir por $\sqrt{Re_L}$), $\text{arrastre} = C_d L \frac{\rho U^2}{2}$ es decir que el arrastre o resistencia de superficie puede ser expresado en términos de un coeficiente C_d multiplicado por la presión de estancamiento $\frac{\rho U^2}{2}$ y el área de la placa L (por ancho unitario), para régimen laminar $C_d = 1,328/\sqrt{Re_L}$.

Capa límite turbulenta:

Hacemos un tratamiento análogo al anterior. Prandtl supuso: $\frac{u}{U} = F = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} = \eta^{1/7}$

Entonces $\tau = 0,0228 \rho U^2 \left(\frac{\nu}{u\delta}\right)^{1/4}$ esfuerzo de corte para capa límite turbulento.

Para capa límite laminar $\tau = \frac{7}{12} \rho U^2 \frac{\partial \delta}{\partial x}$ igualando nos queda la siguiente expresión:

$$\delta^{1/4} d\delta = 0,234 \left(\frac{\nu}{U}\right)^{1/4} dx \quad \text{o} \quad \delta^{5/4} = 0,292 \left(\frac{\nu}{U}\right)^{1/4} x \quad \text{despejamos } \delta = \frac{0,37 x}{\sqrt[5]{Re_x}}$$

Por lo tanto en régimen turbulento el espesor se incrementa más rápidamente que en régimen laminar.

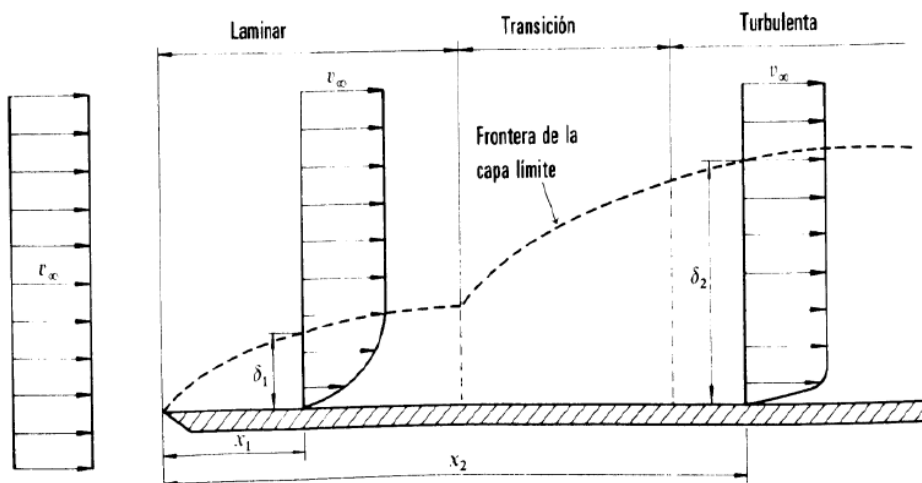
Eliminamos δ de la ecuación de arrastre $\tau = 0,029 \rho U^2 \left(\frac{\nu}{Ux}\right)^{1/5}$ finalmente el arrastre nos da:

$$\text{Arrastre} = \int_0^l \tau dx = \frac{0,036 \rho U^2 l}{\sqrt[5]{Re_l}} = C_d L \frac{\rho U^2}{2}$$

válida para $5 \cdot 10^5 \leq Re_L \leq 10^7$ Siendo $C_d = 0,072 Re_L^{-1/5}$

Y si $10^6 \leq Re_L \leq 10^9$, $C_d = 0,455 / (\log Re_L)^{2,58}$

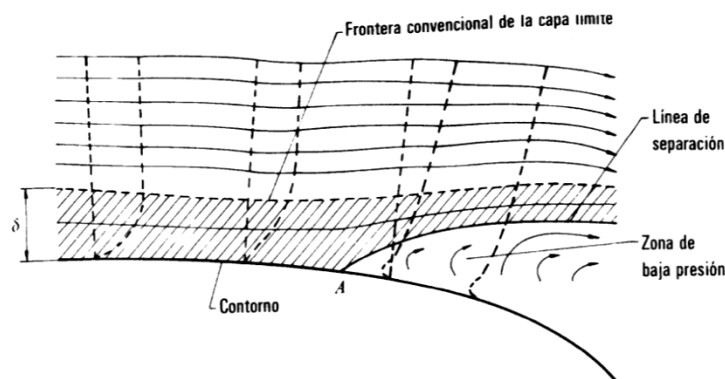
Crecimiento y transición de la capa límite (de laminar a turbulenta):



Fenómenos de separación – Resistencia de forma:

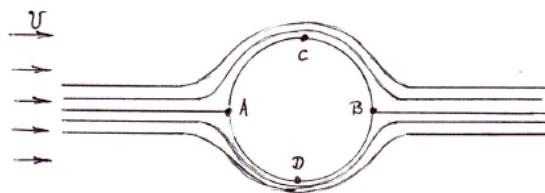
A lo largo de una placa plana, la capa límite continua creciendo aguas abajo si el $\nabla P = 0$; si la presión decrece la capa límite tiende a reducir su espesor, y si la presión aumenta (gradiente adverso) la capa límite aumenta su espesor aguas abajo.

El gradiente adverso, y el esfuerzo de corte en el frontera disminuyen el momento en la capa límite y si ambos actúan sobre distancia suficiente la capa límite se separa. La línea de corriente de la frontera debe separarse de la frontera sólida en el punto de la separación y aguas debajo de este punto, el gradiente adverso produce un flujo hacia atrás. Esta zona de separación se llama “estela”.

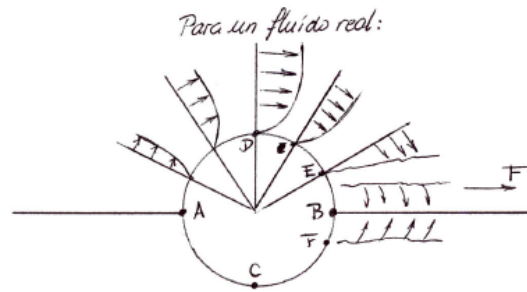


El arrastre y la sustentación tienen dos componentes, el arrastre de forma y de fricción superficial o de arrastre viscoso. Si la separación del flujo sobre un cuerpo se pudiera evitar, la capa límite permanecerá delgada y evitaríamos la reducción de la presión en la estela (mínimo arrastre por presión) por lo tanto es importante dar forma aerodinámica de manera que en la parte trasera del cuerpo la separación ocurra lo más lejos posible.

La naturaleza de la capa límite (laminar o turbulenta) también es importante para influenciar la posición del punto de separación. La mayor transferencia de momentum dentro de una capa límite turbulenta requiere mayor ∇P adverso que si la capa límite fuese laminar para causar la separación. El flujo alrededor de una esfera puede utilizarse para ilustrar esto.



Flujo no turbulento en todas las partes; A-B son puntos de estancamiento, C-D son puntos de presión mínima.



La capa límite se forma en el punto de estancamiento delantero, si la capa límite es laminar el gradiente de presión adverso produce una separación antes, que si la capa límite fuese turbulenta. Analizamos por secciones:

AC o AD : el fluido va de mayor a menor presión, por lo tanto tiende acelerarse entonces la aceleración compensa los esfuerzos de corte y aumento de δ .

CB o DB : la presión aumenta en la dirección de la corriente entonces el desprendimiento de la capa límite ocurre en E y F donde la velocidad es nula, formándose remolinos y turbulencia en la zona de estela (flujo turbulento, si fuese laminar el desprendimiento se da en C y D).

Resistencia de forma y resistencia de superficie.

Si ahora consideramos quieto el fluido y el cuerpo moviéndose en él, se crea un estela muy grande que da como resultado un arrastre de presión grande, que se puede reducir con una superficie rugosa sobre el cuerpo (la estela turbulenta es menor). Esta imposibilidad de avanzar se conoce como resistencia de forma y como dijimos será menor cuanto más alejados estén los puntos de separación C' y D'.

$$R_f = C_f A_p \frac{\rho v^2}{2} \text{ Siendo } A_p \text{ el área proyectada vertical}$$

La resistencia total al avance queda como $R_t = R_s + R_f$

$$R_s = C_s A_b \frac{\rho v^2}{2} \text{ Siendo } A_b \text{ el área bañada por el fluido}$$

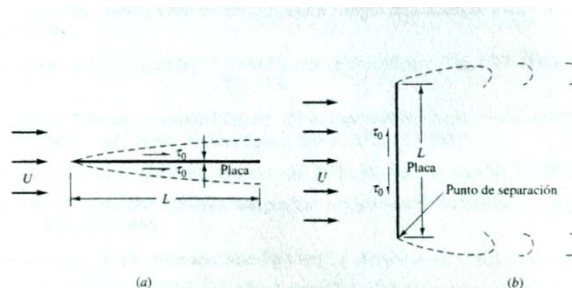


Figura 7.2 Flujo alrededor de una placa plana.

Forma de la carrocería	C_D basado en el área frontal
1920	0,80
1940-45	0,54-0,58
1968-69	0,36-0,38
1990-92	0,29-0,30
Camión con remolque	0,75-0,95
Con cabina redondeada y carenado	0,55-0,75

c_d	Objeto
0.001	lámina plana paralela al flujo ($Re < 10^5$)
0.005	placa plana paralela al flujo ($Re > 10^5$)
0.075	Pac-car II
0.1	Esfera lisa ($Re = 10^6$)
0.15	Schlörwagen 1939 ¹⁴
0.186-0.189	Volkswagen XL1 2014
0.19	General Motors EV1 1996 ¹⁵
0.25	Toyota Prius (3.ª generación)
0.26	BMW i8
0.28	Mercedes-Benz CLA-Class Tipo C 117. ¹⁶
0.295	bala (no ojiva, a velocidad subsónica)
0.3	Audi 100 C3 (1982)
0.48	esfera rugosa ($Re = 10^6$), Volkswagen Beetle ^{17 18}
0.75	típico cohetes de modelismo ¹⁹
.8-.9	Filtro de café viendo hacia arriba.

Aeronave	
c_d	Tipo de aeronave
0.021	F-4 Phantom II (subsónico)
0.022	Learjet 24
0.024	Boeing 787 ²⁴
0.027	Cessna 172/182
0.027	Cessna 310
0.031	Boeing 747
0.044	F-4 Phantom II (supersónico)
0.048	F-104 Starfighter
0.095	X-15 (No confirmado)

Forma del cuerpo		C_D	Número de Reynolds
Cilindro circular		1,2	10^4 a $1,5 \times 10^6$
Cilindro elíptico		0,6	4×10^4
		0,46	10^5
		0,32	$2,5 \times 10^4$ a 10^5
Prisma cuadrado		0,29	$2,5 \times 10^4$
		0,20	2×10^5
		2,0	$3,5 \times 10^4$
Prisma triangular		1,6	10^4 a 10^7
		2,0	10^4
		1,72	10^4
		2,15	10^4
		1,60	10^4
		2,20	10^4
		1,39	10^4
Semitubo		1,8	10^5
		1,0	10^5
		2,3	4×10^4
		1,12	4×10^4

† Datos tomados de W. F. Lindsey, *NACA Tech. Rept.* 619, 1938.

FLUJO EN CONDUCTOS CERRADOS

TEMA 6

Tema 6 – Flujo en conductos cerrados

Deduciremos las expresiones para determinar pérdidas en tuberías.

También hay expresiones para canales abiertos y conductos cerrados no circulares, teniendo en cuenta ciertas consideraciones.

Perdida de carga en tuberías:

Perdidas primarias: son originadas por rozamientos viscosos, se deben al contacto entre el fluido y la superficie de la tubería (capa límite) y rozamiento entre capas o partículas.

Perdidas secundarias: son debidas a la forma, produciéndose en los accesorios de la instalación (válvulas, codos, etc). Son debidas a una resistencia de forma por que producen desprendimiento de la capa límite.

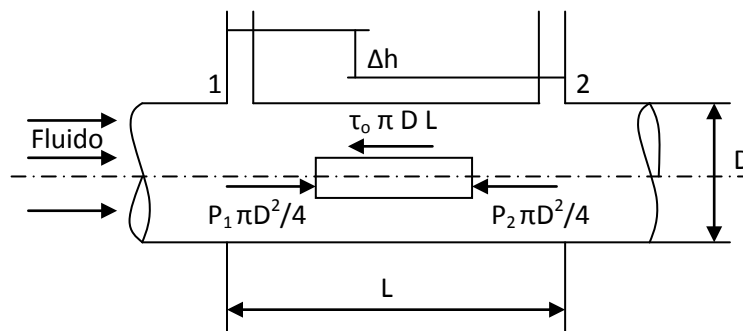
También hay que considerar la superficie de la tubería, si es lisa o rugosa y el tipo de flujo, si es laminar o turbulento, ya que estos factores juegan un papel importante en el cálculo de tuberías.

Formula de Darcy-Weisbach

Abacos y diagramas de aplicación:

Consideramos flujo permanente e incompresible por un conducto de sección constante, como sabemos y vimos en el tema 5 $\tau_o = \lambda \cdot \rho \cdot (V_o)^2 / 2$ que si el régimen es turbulento dicho esfuerzo de corte no es constante en la superficie y se puede considerar que varía aproximadamente en proporción al cuadrado de la velocidad promedio..

Planteamos la ecuación de equilibrio para un conducto cerrado con flujo permanente (si el conducto fuese abierto $P_1 = P_2$ y la reducción de energía sería potencial), la pérdida de energía puede deberse a presión, altura, velocidad según: $h_L = (P_1 - P_2) / \gamma + (Z_1 - Z_2) + (V_1^2 - V_2^2) / 2g$
(No hay diferencias de velocidad pues la sección no varía, y además la tubería es horizontal por tanto $\Delta z = 0$)



Entonces:

$$P_1 \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} - P_2 \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} - \tau_o \cdot \pi D L = 0 \quad , \text{ simplificamos } \pi \text{ y } D:$$

$$P_1 - P_2 = 4 \tau_o \cdot \frac{L}{D} \quad \text{siendo} \quad \tau_o = \text{Cs} \cdot \rho \cdot (\text{Vo})^2 / 2$$

$$P_1 - P_2 = 4 \text{Cs} \cdot \rho \cdot (\text{Vo})^2 / 2 \cdot \frac{L}{D} \quad \text{y} \quad 4 \text{Cs} = f \quad \text{siendo } f = \varphi(\text{Re}, K/D) \text{ el coeficiente de fricción}$$

Finalmente

$$\Delta P = f \frac{L}{D} \frac{\rho \text{Vo}^2}{2}$$

o la forma más usada de la **Ecuación Darcy Weibach**

$$\Delta h = f \frac{L}{D} \frac{\text{Vo}^2}{2g}$$

Vemos que con estas dos últimas ecuaciones podemos determinar la caída de presión entre dos puntos o la pérdida de carga debida a la viscosidad. Ambas ecuaciones no tienen restricciones respecto al tipo de flujo, sin embargo si queremos determinar el factor de fricción dependerá del tipo de flujo reinante, pues $f = \varphi(\text{Re}, K/D)$.

- Régimen Laminar ($\text{Re} < 2000$)

$f = 64 / \text{Re}$ Ecuacion de una hipérbola, que en el diagrama doble logarítmico de moody es una recta. Esta ecuación se deduce igualando Δp de las ecuaciones de Hagen y Darcy:

$$\Delta P = \frac{32 \mu V L}{D^2} \quad \text{y} \quad \Delta P = f \frac{L}{D} \frac{\rho \text{Vo}^2}{2} \quad \text{simplificamos } V \text{ y } D, \text{ y nos queda } f = \frac{64 \mu}{\rho V D} \quad \text{o } f = 64 / \text{Re}$$

- Régimen de transición ($2000 \leq \text{Re} \leq 10000$)

$$f = \frac{0,316}{\text{Re}^{1/4}} \quad \text{Ecuación de Blasius}$$

- Régimen turbulento ($\text{Re} > 10000$)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log (r/k) + 1,74$$

Formula de Colebrook White, base para el diagrama de Moody.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0,869 \cdot \ln \left(\frac{k}{3,7 D} + \frac{2,523}{\text{Re} \cdot \sqrt{f}} \right)$$

Coeficientes de fricción (f) de la Ec. de Darcy Weisbach			
Tipo de Flujo		Ecuaciones Científicas	Ecuaciones Empíricas
Laminar		Ec. Hagen Poiseuille $f = \frac{64}{Re}$	
Turbulento	Pared Hid. Lisa $\frac{vk}{v} \leq 5$	1ª Ec. de Karman-Prandtl $\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right)$	<i>Blassius</i> $f = 0.316 Re^{-0.25}$ $3000 < Re < 100000$ <i>Nikuradse</i> $f = 0.0032 + \frac{0.221}{Re^{0.237}}$ $10^5 < Re < 10^7$
	Pared Hid. En Transición $5 \leq \frac{vk}{v} \leq 70$	Ec. de Colebrook White $\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{2.51}{Re \sqrt{f}} + \frac{k}{13.71D} \right)$	<i>Konakov</i> $f = \frac{1}{(1.81 \log Re - 1.5)^2}$ $Re > 2300$
	Pared Hid. Rugosa $\frac{vk}{v} \geq 70$	2ª Ec. de Karman-Prandtl $\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left(\frac{3.71D}{k} \right)$	<i>Swamee-Jain (1982)</i> $f = \frac{1.325}{\left[\ln \left(\frac{k}{5.74D} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) \right]^2}$ $5000 < Re < 10^8$ $10^{-6} < \frac{k}{D} < 10^{-2}$
		<i>Swamee (1993):</i> Flujo laminar y turbulento y la transición entre ambos $f = \left\{ \left(\frac{60}{Re} \right)^8 + 9.5 \left[\ln \left(\frac{5.74}{Re^{0.9}} + \frac{k}{3.70} \right) - \left(\frac{2500}{Re} \right)^6 \right]^{16} \right\}^{0.125}$	
		Número de Schlichting: $\frac{vk}{v}$	Frontera P.H. Rugosa: $Re = \frac{200D}{k \sqrt{f}}$

Diagrama de Moody:

Moody estudio y reunió todos los casos en un diagrama doble logarítmico. La curva de trazos llamada curva de Moody separa la zona de transición de la turbulenta, donde la curvas se hacen horizontal, entonces el factor de fricción f, pasa a depender solo de la rugosidad relativa K/D.

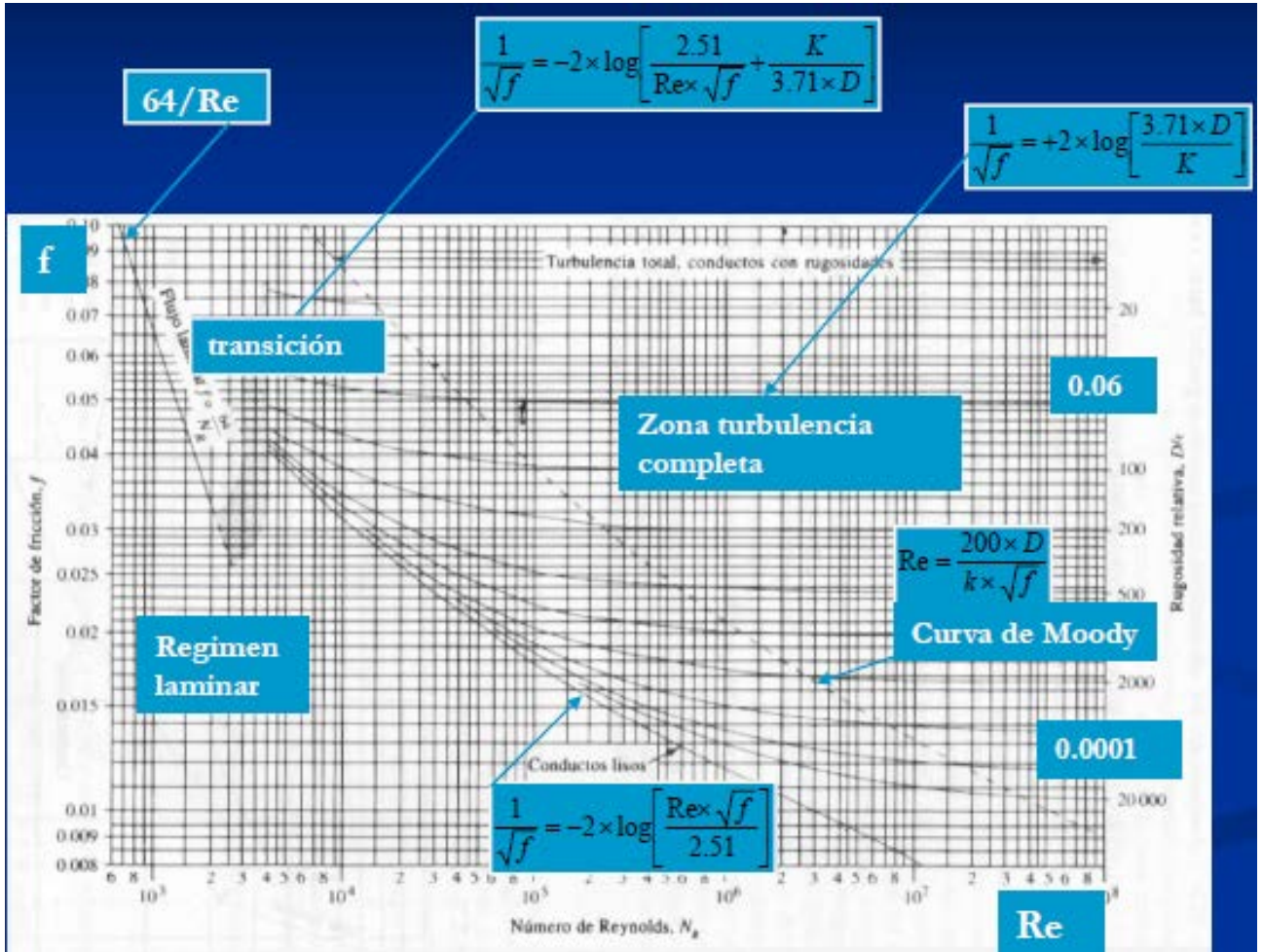
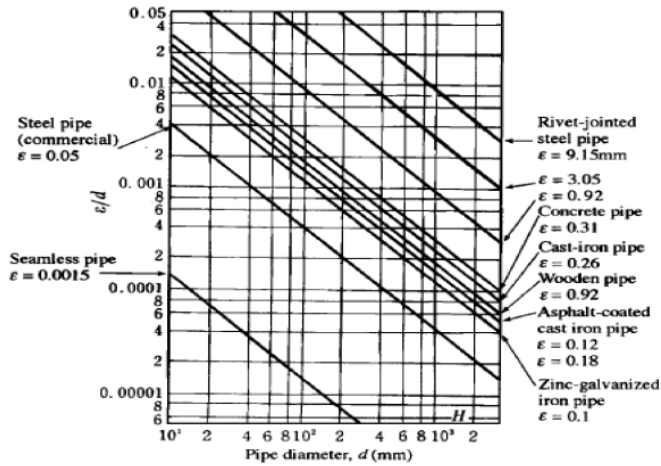


DIAGRAMA AUXILIAR DE MOODY



7.6 Roughness of commercial pipe

Rugosidad: hay dos tipos K, rugosidad absoluta y k/D rugosidad relativa. La rugosidad se debe a imperfecciones superficiales. Si el espesor de la capa limite es mayor que K entonces la tubería es lisa. Si el espesor de la capa limite es menor que K, la tubería es rugosa; por lo tanto como vimos en el tema 5 el espesor de la capa limite varia con el tipo de régimen entonces hay que analizar el régimen de la corriente, finalmente f depende de K/D y a su vez k/D depende $n^\circ Re$.

Sabemos que la rugosidad aumenta con el tiempo pues las sales de los fluidos transportados se depositan y se adhieren a las imperfecciones de la tubería aumentando la rugosidad (no rellenándola). Entonces $K_t = K_o + \alpha t$, siendo:

K_t , rugosidad de la tubería usada (mm)

K_o , rugosidad de la tubería nueva (mm)

α , coeficiente de envejecimiento (mm/año)

t , tiempo (años)



VALORES DE LA RUGOSIDAD ABSOLUTA (k)	
MATERIAL	k en m
Tubos muy lisos sin costura (vidrio, cobre, acero nuevo con superficie pintada, plástico, etc)	1.5 E-6
Fierro forjado	4.5 E-5
Acero rolado nuevo	5.0 E-5
Acero laminado nuevo	4.0 E-5 a 1 E-4
Fierro fundido nuevo	2.5 E-5
Fierro galvanizado	1.5 E-4
Fierro fundido, astillado	1.2 E-4
Fierro fundido oxidado	1 E-3 a 1.5 E-3
Acero retorcido	0.9 E-4 a 0.9 E-3
Asbesto cemento, nuevo	2.5 E-5
Concreto centrifugado nuevo	1.6 E-4
Concreto muy bien terminado a mano	1.0 E-5
Concreto liso	2.5 E-5
Concreto bien acabado, usado	2.0 E-4 a 3.0 E-3
Concreto bien acabado especial	1.6 E-4
Concreto rugoso	1.0 E-4
Duelas de madera	1.8 E-4 a 9.0 E-4

NOTA
 Los valores anteriores se refieren a conductos nuevos o usados, según sea el caso.
 Por su propia naturaleza son valores aproximados.
 Su determinación se ha realizado por métodos indirectos.
 En el caso de tuberías es importante la influencia de las uniones y empalmes. En el caso del concreto el acabado puede ser de naturaleza muy variada y a veces ocurren valores mayores o menores a los presentados en la tabla.
 La variación de estos valores con el tiempo puede ser muy grande.

Radio hidráulico (Rh): anteriormente analizamos el equilibrio en un conducto cerrado y determinamos la ecuación de Darcy Weisbach; ahora haremos un análisis similar para introducir el concepto de Rh.

Por ecuación de movimiento $\Sigma F = 0 = (P_1 - P_2) A - \tau_o L P$, siendo P el perímetro mojado

Por ecuación Bernoulli $\Delta h = (P_1 - P_2) / \gamma$

Entonces igualamos, $(P_1 - P_2) / \gamma = \tau_o L P / (\gamma A)$, siendo $\tau_o = \lambda \cdot \rho \cdot (v_o)^2 / 2$

$$\Delta h = (P_1 - P_2) / \gamma = \lambda \cdot \rho \cdot (v_o)^2 / 2 \cdot L P / (\gamma A),$$

Siendo el radio hidráulico para una tubería de sección circular, $Rh = \frac{A}{P} = \frac{\pi \cdot r^2}{2 \pi r} = \frac{r}{2} = \frac{D}{4}$

$$\Delta h = \lambda \frac{L}{Rh} \frac{v_o^2}{2g}$$

Como vemos llegamos a la misma ecuación de Darcy Weisbach pues:

$$\Delta h = \lambda \frac{L}{Rh} \frac{v_o^2}{2g} \quad \text{y reemplazando Rh,} \quad \Delta h = 4\lambda \frac{L}{D} \frac{v_o^2}{2g} \quad \text{donde } f = 4\lambda$$

Dos tuberías son hidráulicamente similares, si sus radios hidráulicos son similares.

El Rh es útil para comparar tuberías de secciones diferentes, ejemplo una tubería cuadrada

$Rh = \frac{A}{P} = \frac{a^2}{4a} = \frac{a}{4}$ será similar a una tubería cilíndrica, si los Rh son similares.

NUMERO DE REYNOLDS PARA SECCION CIRCULAR Y NO-CIRCULAR:

$R_e = \frac{V D_h}{\nu}$

DIAMETRO HIDRAULICO EQUIVALENTE (D_h)

SCHILLER-NIKURADSE

$D_h = 4R_h = 4 \text{ RADIO HIDRAULICO}$

$A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$
 $P = \pi(D + d)$

$A = L^2$
 $P = 4L$

$A = LH$
 $P = 2L + 2H$

$A = L^2 - \frac{\pi}{4}d^2$
 $P = 4L + \pi d$

MALAIKA

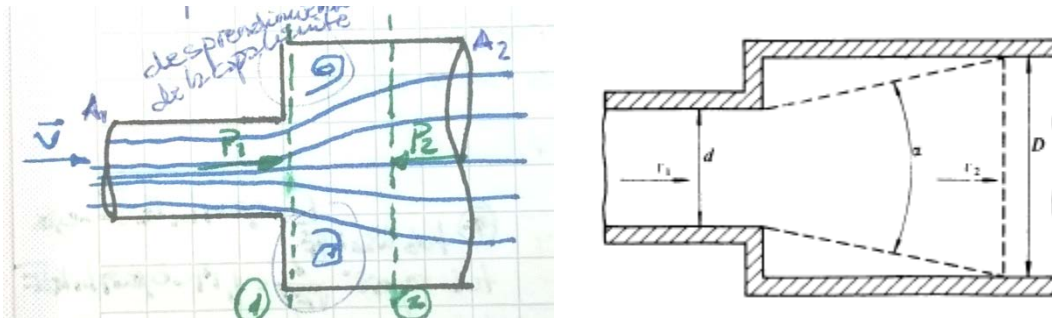
$D_h = d = \text{DIAMETRO INSCRITO}$

Pérdidas secundarias – Longitud equivalente:

Las pérdidas que ocurren en tuberías debido a curvas, uniones, válvulas, etc accesorios en general, se denominan pérdidas locales o menores o secundarias, dichos nombres son solo convencionales pues hay casos en los que estas pérdidas son importantes.

Expansión Súbita: se generan pérdidas por la formación de remolinos $h_L = \text{cte} \cdot V_2^2 / 2g$

Planteamos la ecuación de cantidad de movimiento para un volumen de control entre 1 y 2:



$$P_1 A_1 - P_2 A_2 + P_1 (A_2 - A_1) = \rho Q (V_2 - V_1), \text{ simplificando y dividiendo por } \gamma$$

$$(P_1 - P_2) / \gamma = Q / g A_2 \cdot (V_2 - V_1)$$

$$(P_1 - P_2) / \gamma = (V_2 / g) \cdot (V_2 - V_1)$$

Aplicamos Bernoulli entre 1 y 2, $(P_1 - P_2) / \gamma = (V_1^2 - V_2^2) / 2g + h_L$

Igualamos, $(V_2 / g) \cdot (V_2 - V_1) = (V_1^2 - V_2^2) / 2g + h_L$

Entonces

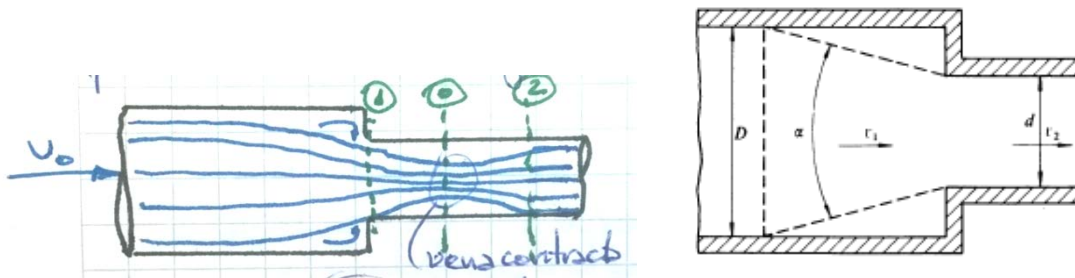
$$h_L = (2 V_2^2 - 2 V_2 V_1 - V_2^2 + V_1^2) / 2g = (V_1 - V_2)^2 / 2g = (1 - V_2 / V_1)^2 \cdot V_1^2 / 2g = \text{cte} \cdot V_1^2 / 2g$$

Vemos que la cte es el coeficiente de pérdida, entonces por ejemplo una tubería que desembogue en un embalse $D_2 \gg D_1$, $K=1$ y toda la pérdida es de energía cinética.

Accesorios y válvulas expresados en pies (m) equivalente de tubería				
Accesorios y válvulas	3/4"	1"	1 1/4"	1 1/2"
	(20 mm)	(25 mm)	(32 mm)	(40 mm)
Codo a 45°	1 (0,3)	1 (0,3)	1 (0,3)	2 (0,6)
Codo normalizado a 90°	2 (0,6)	2 (0,6)	3 (0,9)	4 (1,2)
Codo de gran radio a 90°	1 (0,4)	2 (0,6)	2 (0,6)	2 (0,6)
T o cruz (corriente que gira 90°)	4 (1,2)	5 (1,5)	6 (1,8)	8 (2,4)
Válvula de compuerta	---	---	---	---
Válvula de mariposa	---	---	---	---
Válvula de retención con clapeta oscilante*	4 (1,2)	5 (1,5)	7 (2,1)	9 (2,7)

Accesorios y válvulas expresados en pies (m) equivalente de tubería				
Accesorios y válvulas	2"	2 1/2"	3"	3 1/2"
	(50 mm)	(65 mm)	(80 mm)	(90 mm)
Codo a 45°	2 (0,6)	3 (0,9)	3 (0,9)	3 (0,9)
Codo normalizado a 90°	5 (1,5)	6 (1,8)	7 (2,1)	8 (2,4)
Codo de gran radio a 90°	3 (0,9)	4 (1,2)	5 (1,5)	5 (1,5)
T o cruz (corriente que gira 90°)	10 (3,1)	12 (3,7)	15 (4,6)	17 (5,2)
Válvula de compuerta	1 (0,3)	1 (0,3)	1 (0,3)	1 (0,3)
Válvula de mariposa	6 (1,8)	7 (2,1)	10 (3,1)	---
Válvula de retención con clapeta oscilante*	11 (3,4)	14 (4,3)	16 (4,9)	19 (5,8)

Contracción súbita: la pérdida de carga esta sujeta al mismo análisis anterior siempre se conozca la magnitud de contracción del chorro. Vemos que de 1 a 0, la energía de presión se convierte en energía cinética y que de 0 a 2 la energía cinética se reconvierte en energía de presión



Otra forma de determinar perdidas menores es expresarlas en términos de longitud equivalente del accesorio a longitud de tramo de cañería que produzca iguales perdidas.

Perdidas $h_L = f L/D V_2^2/2g = cte acc. V_2^2/2g$ entonces $Le = cte acc. D / f$

Norma: si la longitud de la cañería es mayor a 1000 D, se desprecia sus pérdidas secundarias

Finalmente la longitud total de la cañería es igual a la suma de la longitud de la cañería mas la Longitud equivalente de los accesorios, y la pérdida total será: $h_{L,T} = f L_T / De V_2^2/2g$

Sistemas de tuberías (Serie-Paralelo-Ramificado)

Tuberías en serie: se debe cumplir la siguiente analogía con la ley de Ohm.

$$Q = Q_1 = Q_2 = Q_3 = \dots = Q_n$$

$$h_{pT} = h_{p1} + h_{p2} + h_{p3} + \dots + h_{pn}$$

y $V = 4Q/\pi D^2$ entonces $V^2 = 16Q^2/\pi^2 D^4$

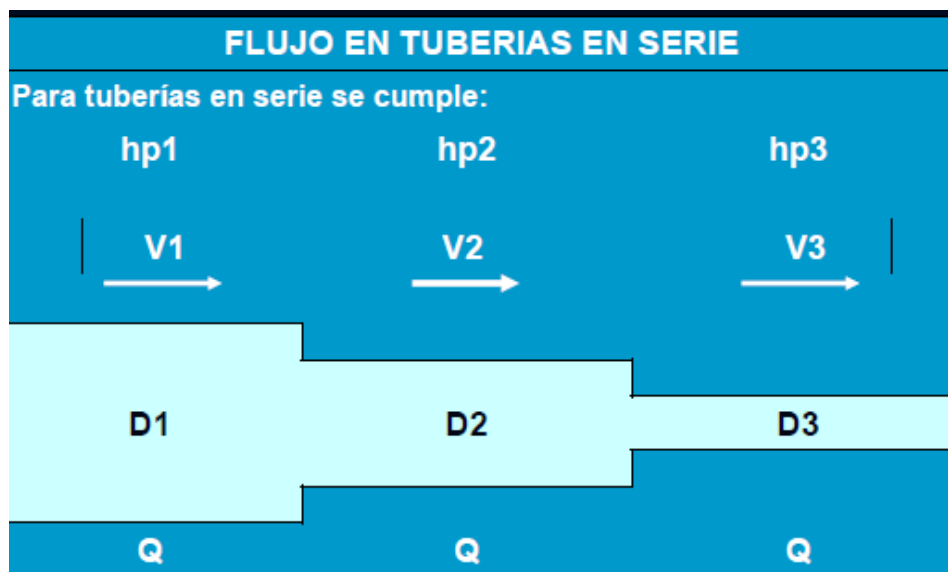
$$h_{pT} = f_1 \frac{L_1}{D_1^5} \frac{8Q^2}{\pi^2 g} + f_2 \frac{L_2}{D_2^5} \frac{8Q^2}{\pi^2 g} + \dots + f_n \frac{L_n}{D_n^5} \frac{8Q^2}{\pi^2 g} = f_e \frac{L_e}{D_e^5} \frac{8Q^2}{\pi^2 g}$$

Para régimen turbulento $f = \text{cte}$, entonces $\frac{L_e}{D_e^5} = \sum \frac{L_i}{D_i^5}$ una vez conocido L_e para un D_e definido, podemos calcular h_{pT} .

Nota: dado que $L_e = \sum L_i (D_e/D_i)^5$

si $D_e > D_i$, entonces aumenta mucho los metros de L_e para el tramo i , para una determinada h_L .

si $D_e < D_i$, entonces disminuyen los metros de L_e para el tramo i , para una determinada h_L .



Sistema equivalente

Muchas veces es ventajoso sentar la hipótesis que el sistema de cañerías en serie se sustituye por una tubería única (generalmente se adopta la de mayor longitud).

Se dice que una cañería es equivalente cuando la pérdida de carga para igual caudal es la misma en la tubería equivalente y la cañería en serie.

Tuberías en paralelo: se debe cumplir la siguiente analogía con la ley de ohm

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n$$

$$h_{pT} = hp_1 = hp_2 = hp_3 = \dots = hp_n$$

y $V = 4Q/\pi D^2$ entonces $V^2 = 16Q^2/\pi^2 D^4$

$$h_{pT} = f_1 \frac{L_1}{D_1^5} \frac{8Q^2}{\pi^2 g} = f_2 \frac{L_2}{D_2^5} \frac{8Q^2}{\pi^2 g} = \dots = f_n \frac{L_n}{D_n^5} \frac{8Q^2}{\pi^2 g} = f_e \frac{L_e}{D_e^5} \frac{8Q^2}{\pi^2 g}$$

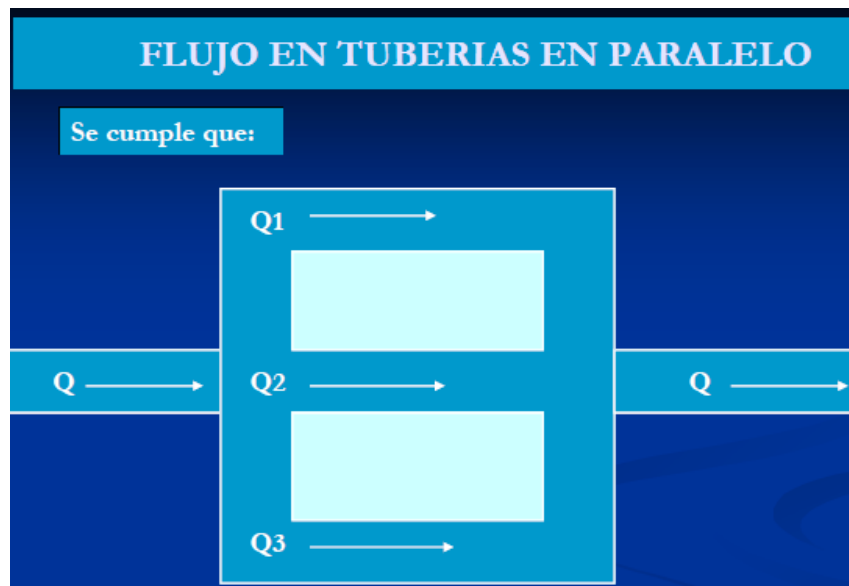
Despejamos Q y nos queda: $Q = \sqrt{\frac{h_{pT}}{f_e} \frac{D_e^5}{L_e} \frac{\pi^2 g}{8}} = \pi \sqrt{\frac{g}{8}} \sqrt{\frac{D_e^5}{f_e L_e}} \sqrt{h_{pT}} =$, lo mismo para Q1, Q2, ... Qn

Simplificando los valores constantes, y considerando régimen turbulento $f = \text{cte}$, queda

$$\left(\frac{D_e^5}{L_e}\right)^{1/2} = \left(\frac{D_1^5}{L_1}\right)^{1/2} + \left(\frac{D_2^5}{L_2}\right)^{1/2} + \dots + \left(\frac{D_n^5}{L_n}\right)^{1/2}$$

Una vez conocido L_e para un D_e definido, podemos calcular h_{pT} .

$$L_e = \frac{D_e^5}{\left[\left(\frac{D_1^5}{L_1}\right)^{1/2} + \left(\frac{D_2^5}{L_2}\right)^{1/2}\right]^2}$$



Tubería ramificada con convergencia en un nudo:

Supongamos tener un tanque que abastece a otros dos tanques. Las pérdidas entre dos puntos serán proporcionales a las perdidas, $h_1 > h_x$ y $(h_2 \text{ y } h_3) < h_x$, sino el agua no podría subir al tanque 2 y 3.

$$h_{p1} = h_1 - h_x$$

$$h_{p2} = h_2 - h_x$$

$$h_{p3} = h_3 - h_x$$

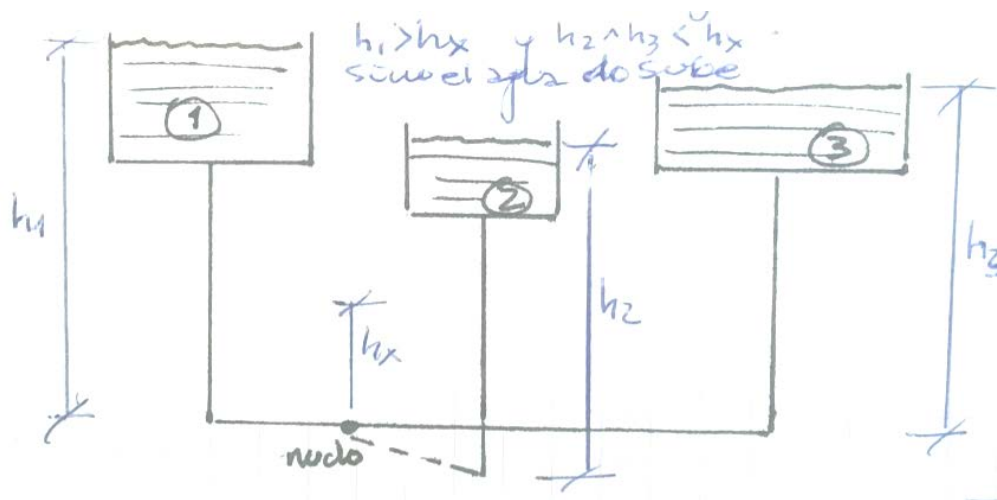
Debido a que $Q_i = B_i \sqrt{h_{pT}}$

$$Q_1^2 = B_1^2 (h_1 - h_x)$$

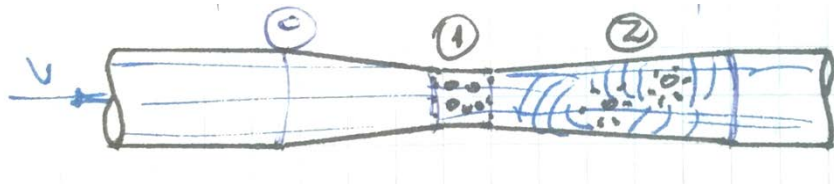
$$Q_2^2 = B_2^2 (h_2 - h_x)$$

$$Q_3^2 = B_3^2 (h_3 - h_x)$$

Finalmente para sistema paralelo $Q_1 = Q_2 + Q_3$, tenemos ahora un sistema de ecuaciones compatible determinado.

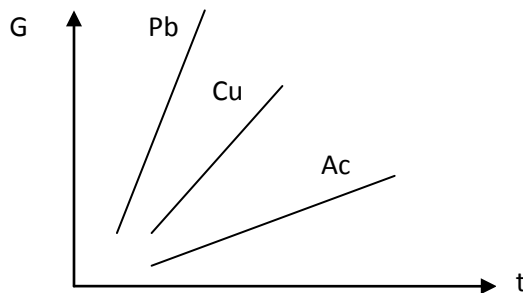


Cavitación: es un fenómeno que se produce cuando un líquido le bajamos la presión hasta alcanzar la presión de vapor, entonces el líquido se evapora formando pequeñas burbujas (1), luego en (2) la presión aumenta por lo que las burbujas desaparecen (implotan) entonces el líquido ocupa violentamente la zona de las burbujas generando ondas de compresión en las paredes metálicas, causando presiones altísimas que afectan la cañería. Por esto se produce un martilleo permanente de cierta frecuencia f , y se va arrancando material, por tanto cuando hablamos de que una máquina cavita significa que se deteriora.



El fenómeno de cavitación se hace más destructivo cuando hay presencia de fenómenos corrosivos y/o fatiga. El problema siempre afecta aguas debajo de donde se origina.

Para determinar la resistencia a la cavitación de un material se analiza la cantidad en peso que se pierde de material durante cierta cantidad de horas de funcionamiento. Vemos que el acero es el material que más resiste a la cavitación.



$$\text{Aplico Bernoulli entre 0 y 1} \quad \frac{P_0}{\gamma} + Z_0 + \frac{V_0^2}{2g} - hL = \frac{P_1}{\gamma} + Z_1 + \frac{V_1^2}{2g}$$

$$\text{Despejamos } P_1 \text{ y consideramos } \Delta Z=0, \quad P_1 = P_0 - \frac{\rho(V_1^2 - V_0^2)}{2} - hL \gamma$$

Siendo P_1 y P_0 presiones absolutas, $P_1 (+)$ y $P_0 (+)$ por lo tanto $P_1 < P_0$ entonces un límite para P_1 como no puede ser negativa $P_1 \geq P_{vs}$. Si $P_1 = P_{vs}$ comienza el fenómeno de cavitación. Por lo tanto debo evitar tener gran energía cinética, y/o tener mucha pérdida de carga.



ANÁLISIS DIMENSIONAL Y SEMEJANZA DINÁMICA

TEMA 7

Tema 7 – Análisis Dimensional y Semejanza Dinámica

A partir del análisis dimensional es posible formular ecuaciones que expliquen un problema sin hacer grandes experimentaciones, solo nos abastecemos de un simple proceso matemático.

Teorema de Buckingham:

Buckingham ideó un método que resuelve problemas utilizando las magnitudes que intervienen en dicho problema, si todas estas magnitudes intervienen en la solución, cualquiera sea el sistema de unidades usado, deberá cumplirse la igualdad de la relación de dimensiones en la ecuación del problema.

TEOREMA: Si en un fenómeno intervienen “m” magnitudes, las cuales tienen “n” dimensiones independientes, entonces se pueden formar (m-n) parámetros adimensionales que nos permitirán encontrar la ecuación solución.

Dado $f(A_1, A_2, \dots, A_m) = 0$ y si π_1, π_2, \dots representan agrupaciones adimensionales de las cantidades A_1, A_2, \dots . Entonces con las “n” dimensiones involucradas, existe una ecuación de la forma: **$f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{(m-n)}) = 0$**

El procedimiento para encontrar los parámetros π , consiste en seleccionar “n” de las A cantidades con diferentes dimensiones que contengan entre ellas las n dimensiones y usarlas como variables repetitivas junto con unas de las otras cantidades A para cada π . Es decir que no es necesario ni significa que todas las m cantidades tengan las n dimensiones (pueden tener menos). Una vez determinadas las n dimensiones, formamos (m-n) ecuaciones π que llevarán a una productoria de las cantidades A elevadas a ciertos exponentes, salvo la última A. Así se hace para cada agrupación π , luego como π es adimensional, sus dimensiones se elevan a exponente CERO, por lo tanto tenemos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, calculamos la relación entre cantidades y finalmente el parámetro π , se calcula experimentalmente, dando la ecuación definitiva.

$$\pi_1 = A_1^{x_1} A_2^{y_1} A_3^{z_1} A_4$$

$$\pi_2 = A_1^{x_2} A_2^{y_2} A_3^{z_2} A_4$$

.

.

$$\pi_{(m-n)} = A_1^{x_{m-n}} A_2^{y_{m-n}} A_3^{z_{m-n}} A_4$$

Nota: las cantidades que elijo para elevarlas a los exponentes x,y,z; una vez elegidas no se cambian para todas las ecuaciones π .

Ejemplo: $Q = f(\Delta P/L, D, \mu)$ o sea $f(Q, \Delta P/L, D, \mu)$ y $m-n=4-3=1$ es decir una sola agrupación adimensional π .

$$\pi_1 = (L^3 T^{-1})^{x_1} (M L^{-2} T^{-2})^{y_1} (L)^{z_1} (M L^{-1} T^{-1}) = M^0 L^0 T^0$$

Sistema Ec. 3x3

M	$y + 1 = 0$	$y = -1$
L	$3x - 2y + z - 1 = 0$	$z = -4$
T	$-x - 2y - 1 = 0$	$x = 1$

Entonces $\pi = Q^x (\Delta P/L)^y D^z \mu$ nos queda $\pi = \frac{Q \mu}{(\Delta P/L) D^4}$ siendo π experimentalmente determinado como $128/\pi$, terminamos deduciendo que se trata de la Ecuación de Hagen Poiseulle:

$$\Delta P = \frac{128 Q L \mu}{\pi D^4}$$

Teoría de Modelos – Semejanza Hidráulica:

En muchos fenómenos son tantas las variables que intervienen que muchas de ellas no se pueden abordar por vía analítica entonces se recurre a ensayos sobre modelos a escala, mas chica por lo general del prototipo real. De esta manera se obtienen soluciones reales y se ahorra tiempo y dinero. El modelo debe ser sometido a las mismas condiciones en las que desempeñara el prototipo. Las leyes de semejanza son:

Semejanza geométrica: se refiere a las proporciones y formas entre modelo y prototipo, es decir la escala del modelo:

$$\left(\frac{L1}{L2}\right)_m = \left(\frac{L1}{L2}\right)_p$$

Semejanza cinemática: se refiere a que puntos homólogos debe mantener idénticas relaciones entre sus velocidades y aceleraciones. La red de corriente debe ser semejante.

$$\left(\frac{V1}{V2}\right)_m = \left(\frac{V1}{V2}\right)_p$$

$$\left(\frac{a1}{a2}\right)_m = \left(\frac{a1}{a2}\right)_p$$

Semejanza dinámica: se refiere a la relación de fuerzas entre puntos homólogos que debe ser la misma para modelo y prototipo.

$$\left(\frac{F1}{F2}\right)_m = \left(\frac{F1}{F2}\right)_p$$

Por lo tanto diremos que un modelo es semejante a un prototipo cuando se cumplan simultáneamente las tres leyes anteriores.

Criterios de semejanza, cuando se estudia un modelo sabemos que todas las fuerzas posibles pueden actuar. Estas son:

F inercia = F presión + F gravedad + F viscosas + F tensión superficial + F compresibilidad

Como generalmente una es la que prevalece sobre las demás, se relacionan dos de estas fuerzas dando así a los distintos números adimensionales que deben ser semejantes $(N^o)_m = (N^o)_p$ para que un estudio dado de un modelo donde actúan cierto par de fuerzas principales, podamos afirmar la semejanza con el prototipo, si los números adimensionales lo son.

Número de Euler: se define como la relación entre las fuerzas de inercia y las fuerzas de presión.

$$\frac{Fi}{Fp} = \frac{Ma}{\Delta P A} = \frac{\rho L^3 L}{(\Delta P) L^2 T^2} = \frac{\rho V^2}{\Delta P} = \frac{V}{\sqrt{\Delta P / \rho}}$$

Número de Reynolds: se define como la relación entre las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas. Nos permite distinguir los distintos tipos de régimen en los flujos.

$$\frac{Fi}{F\mu} = \frac{Ma}{\tau A} = \frac{\rho L^3 L}{(\mu V / L) L^2 T^2} = \frac{\rho L V^2}{\mu V} = \frac{\rho L V}{\mu}$$

Número de Froude: se define como la relación entre las fuerzas de inercia y las de gravedad. Es útil en canales abiertos, pues nos indica que tan rápido es el flujo, $F > 1$ rápido, $F < 1$ lento.

$$\frac{Fi}{Fg} = \frac{Ma}{Mg} = \frac{L}{g T^2} = \frac{V^2}{g L} = \frac{V}{\sqrt{g L}}$$

Número de Weber: se define como la relación entre las fuerzas de inercia y las fuerzas de tensión superficial.

$$\frac{Fi}{F\sigma} = \frac{Ma}{\sigma L} = \frac{\rho L^3 L}{\sigma L T^2} = \frac{\rho L V^2}{\sigma} = \frac{V}{\sqrt{\sigma / \rho L}}$$

Es útil en la interfaz liquido-gas o liquido-liquido o interfaz con frontera solida.

Número de Mach: se define como la relación entre las fuerzas de inercia y las de compresibilidad.

$$\frac{F_i}{F_k} = \frac{M a}{K A} = \frac{\rho L^3 L}{k L^2 T^2} = \frac{\rho V^2}{K} = \frac{V}{\sqrt{K/\rho}}$$

También se lo puede definir como la relación entre la energía cinética y tensión del cuerpo. Como vemos el número de Mach da la relación entre la velocidad de un cuerpo en un fluido y la velocidad del sonido en ese fluido. Como $M = V / C$

Si $M > 1$ entonces el flujo es supersónico

Si $M = 1$ entonces el flujo es sónico

Si $M < 1$ entonces el flujo es subsónico

Ecuación de Bertrand: da la relación entre las propiedades del modelo y del prototipo.

Definimos: $a = M/m$ relación de masas, $b = F/f$ relación de fuerzas, $c = V/v$ relación de velocidades, $d = L/l$ relación de longitud, $e = T/t$ relación de tiempos

Aplicamos la 2da ley de Newton $F/f = M a_p / m a_m$ entonces $b = a (L/T^2 t^2/l)$

ó **$b = a d / c^2$ Ecuación Bertrand.**

Utilizaremos la Ecuación de Bertrand en un fenómeno puramente gravitacional:

$F/f = M g / m g$, entonces $b = a$ igualamos con ec. Bertrand, no queda **$d = e^2$**

Y como velocidad = espacio / tiempo, entonces $c = d/e$ o $e = d/c$, reemplazando $\frac{d}{c} = \sqrt{d}$

O $C = \sqrt{d}$ finalmente $\frac{V}{\sqrt{L}} = \frac{v}{\sqrt{l}}$ dividiendo por g , nos queda que **Froude_p = Froude_m**



FLUJO COMPRESIBLE

TEMA 8

Tema 8 – Flujo compresible

Analizaremos las características de los flujos no permanentes ($d \text{ prop} / dt \neq 0$).

Propagación de ondas elásticas:

Recordemos que el número de Mach es un número adimensional que relaciona la energía cinética del flujo con respecto a la energía interna del fluido, en otras palabras el número de Mach relaciona la velocidad del flujo (F inercia) con la velocidad del sonido de una onda elástica del fluido en el flujo (F compresibilidad).

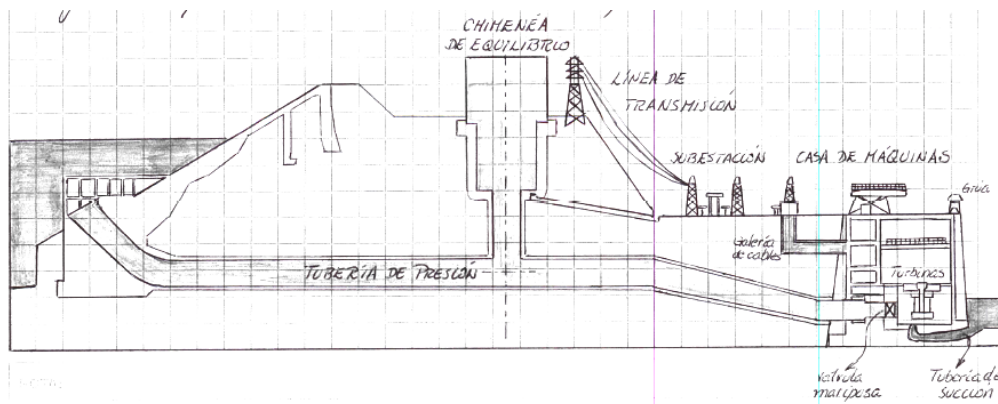
$$\frac{F_i}{F_k} = M = \frac{V}{C} = \frac{V}{\sqrt{K/\rho}}$$

Cuando se perturba el equilibrio en un fluido se produce alguna variación de energía (de presión) que se traduce en ondas elásticas que se propagan a la velocidad del sonido por esta variación de presión que golpea nuestro tímpano, por lo que el hombre puede escuchar. La velocidad de propagación depende del medio por donde se desplaza la onda sónica (en el aire es más rápida que en el agua).

Golpe de ariete:

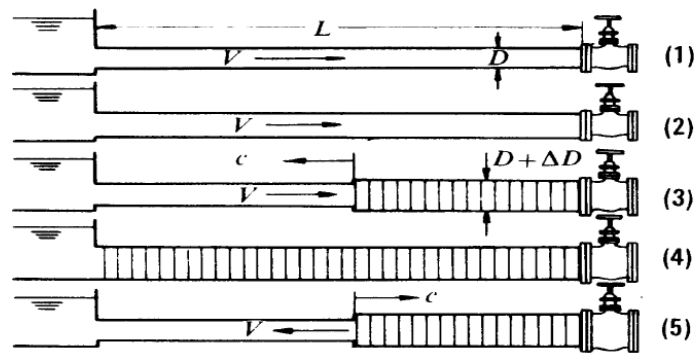
Puede ocurrir en un conducto cerrado que fluye lleno, cuando existe un retardo en el flujo (válvula cerrada) o cuando hay una aceleración en el flujo (válvula semicerrada). Ejemplo: cuando un generador se queda sin carga, se embala, acelerando consigo la turbina acoplada que comienza a vibrar debido a la alta velocidad resultante del embale del generador y del agua que la hace girar; entonces para evitar la destrucción de la turbina se cierra la válvula de entrada de agua, con lo que solucionamos este problema pero se genera uno nuevo en la tubería debido al golpe de ariete.

El golpe de ariete es un fenómeno transitorio por lo cual se considera que el régimen es variable, la tubería no es 100% rígida y el flujo no es incompresible.

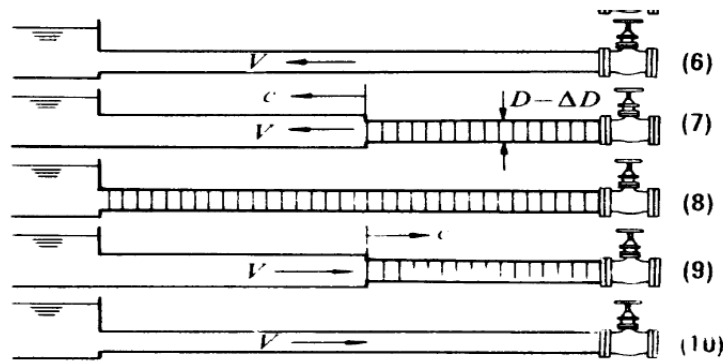


Cuando se cierra la válvula se produce una disminución de presión aguas abajo respecto de aguas arriba, por lo que se propaga como onda elástica a la velocidad del sonido, hacia la fuente tratando de llevar al reposo al fluido, junto con los efectos friccionales.

Descripción de la secuencia de eventos, luego del cierre súbito de la válvula:



- a- Instante de cierre ($t=0$): el fluido se comprime y llega al reposo, y la pared de la tubería se estira por lo tanto la energía de velocidad, se convierte en energía elástica o de presión. Una vez comprimida la primera capa de aguas arriba, se desplaza el ΔP como onda a la velocidad del sonido C , hacia aguas arriba. Cuando la onda llega a la fuente todo el fluido de la tubería se halla con una cabeza adicional (+h) totalmente en reposo con una tubería dilatada en un tiempo $t=L/C$.
- b- Llegada de la onda de compresión a la fuente: (instante $t=L/C$), se produce un desbalance en el extremo aguas arriba (depósito) pues la presión del embalse no cambia. El flujo empieza a moverse en dirección contraria (o sea aguas abajo) por lo tanto el flujo en la tubería retorna a su presión normal antes del cierre por lo que la pared de la tubería vuelve a su estado original. La onda de depresión viaja a velocidad C , y el fluido dentro de la tubería recupera su velocidad V_0 y presión. En un tiempo $t=L/C$ el fluido se mueve hacia el tanque



- c- Válvula cerrada: cuando la onda llega a la válvula cerrada, no se dispone de fluido para mantener el flujo y se desarrolla una baja de presión (-h) de modo que el fluido es llevado al reposo entonces la tubería se aplasta y la onda viaja a una velocidad C dejando en reposo el resto de fluido aguas arriba el cual se expande por la baja presión
- d- Llegada de la onda de depresión a la fuente: aquí todo el fluido se encuentra a una presión menor que la que había antes del cierre. Esto produce un segundo desbalance entre el tanque y la tubería, entonces el fluido se mueve hacia aguas abajo a medida que recupera sus condiciones iniciales. La onda se mueve con una velocidad C hacia aguas abajo, en este tiempo termina el ciclo.

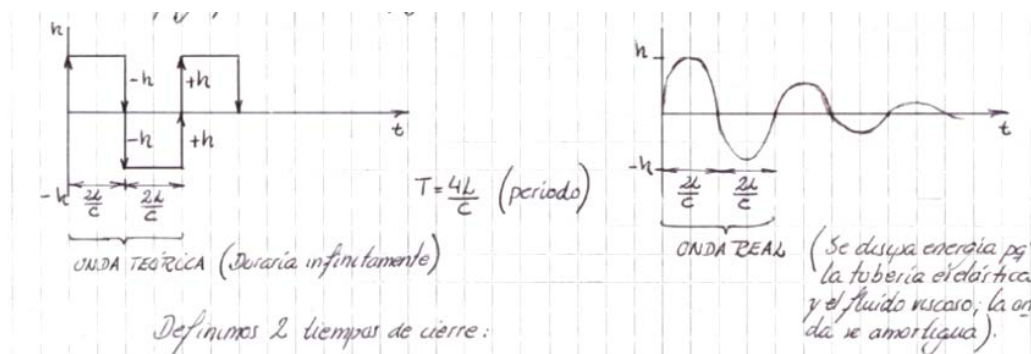
Este proceso se repite cada $4 L/C$ segundos, los efectos de la fricción en el fluido y la elasticidad imperfecta de este y la pared de la tubería, son los que atenúan la vibración y hacen que el fluido llegue al reposo permanente.

Hay dos tipos de cierre de la válvula, de acuerdo a la rapidez con que se haga:

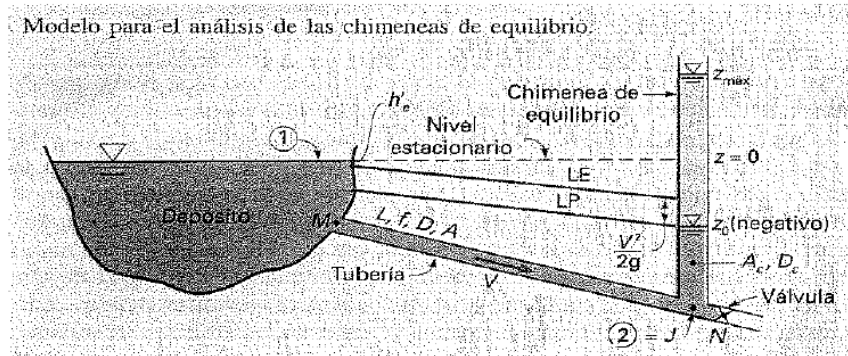
Cierre lento, cuando $t_{c\text{ lento}} > 2 L/C$

Cierre rápido, cuando $t_{c\text{ rápido}} \leq 2 L/C$

También existe la definición de cierre teórico o instantáneo, donde $t=0$ seg.



Para evitar el golpe de ariete se usan chimeneas de equilibrio. También se usan cañerías protegidas estructuralmente con aros o anillos en la zona cercana a la válvula.

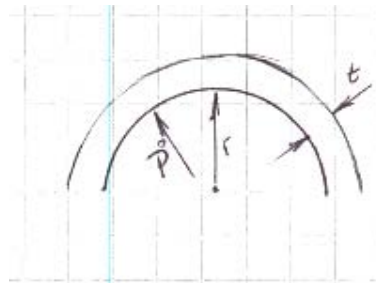


El golpe de ariete es más peligroso cuando

- Cuanto mayor sea la longitud de la tubería
- Cuanto mayor sea la velocidad del líquido en la tubería
- Cuanto más rápido sea el cierre de la válvula

Efectos de la compresibilidad – Perdida de carga en tuberías:

Haciendo un balance energético, en el cierre instantáneo:



$E_c = W$ compresión del líquido + W expansión de la tubería

$$\frac{1}{2} m v^2 = P_{med} \Delta V + F_{med} \Delta L$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{\Delta P}{2} \frac{\Delta P}{K} V + T \frac{L}{2} \frac{T}{t}$$

NOTA: en W exp, la tensión $T = F/L = P \cdot r = P \cdot D/2$ y la tensión unitaria para el espesor t , será $T/t = \gamma h D / 2t$ pero además la tensión $T = (E \cdot \text{deformación})$, siendo E el módulo de elasticidad volumétrico de Young; entonces el alargamiento unitario será: $T / (t E) = \gamma h D / (2t E)$ y el alargamiento total se dará multiplicando por el perímetro $T \pi D / (t E) = \gamma h D^2 \pi / (2t E)$

O sea:

$$\frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} A L v^2 = \frac{\gamma h}{2} \frac{\gamma h A L}{k} + \frac{\gamma h L D}{4} \frac{\gamma h D^2 \pi}{2 t E}$$

Operamos matemáticamente:

$$\frac{v^2}{g} = \gamma h^2 \left(\frac{1}{K} + \frac{D}{t E} \right)$$

$$\frac{v^2}{g} = \rho g h^2 \frac{1}{K} \left(1 + \frac{K D}{t E} \right)$$

$$h^2 = \frac{v^2}{\rho g^2 \frac{1}{K} \left(1 + \frac{K D}{t E} \right)}$$

Finalmente:

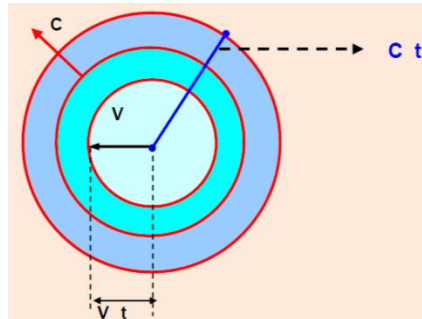
$$h = \frac{v}{g} \frac{\sqrt{\frac{K}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{K D}{t E}}}$$

Vemos que a mayor rigidez, (mayor modulo elasticidad volumétrico), aumenta la sobrepresión en la cañería.

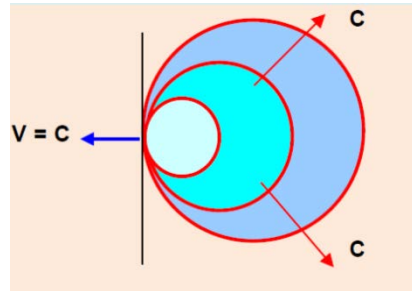
Características del flujo subsónico-sónico-supersónico:

El número de Mach es la razón entre la velocidad del flujo y la velocidad del sonido, $M=v/c$, por lo tanto el Mach varía dependiendo que tan denso sea este medio.

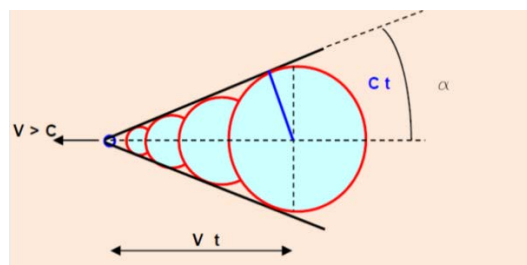
Flujo subsónico, $v < c$ entonces $M < 1$; el objeto produce cierta perturbación (compresión) entonces hay una propagación de ondas con velocidad "c" alejándose del objeto. Cuando $v < c$, la onda se aleja del cuerpo que se mueve, es decir que adelanta abriendo camino al cuerpo que viene. Cuando el cuerpo viaja $v \cdot t$, la onda va $c \cdot t$ mas adelante.



Flujo sónico, $v = c$ entonces $M = 1$; el objeto a medida que se desplaza provoca perturbación, la onda se concentra en la proa del objeto, por su tangente pasa el frente de ondas, llamado "barrera del sonido", ahí se produce un choque de ondas.

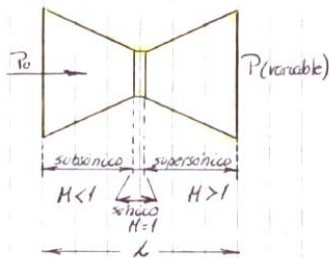


Flujo supersónico, $v > c$ entonces $M > 1$; El objeto se mueve mas rápido que la velocidad del sonido u onda esférica emitida por él, produciéndose un frente de onda cónico en el vértice del cuerpo. El ángulo del cono se llama ángulo de Mach: $\text{sen } \alpha = c / v = 1 / M$ es decir que si aumenta la velocidad v del objeto, aumenta el $n^\circ M$, y por ende se reduce el ángulo del cono.



Flujo isoentrópico a través de toberas

Sabemos que un flujo isoentrópico termodinámicamente es $dS = dQ / T$ para un proceso reversible es cero pues $\Delta S = 0$ por lo tanto $\Delta Q / T = 0$ entonces podemos decir que es un proceso adiabático, sin fricción. Consideremos flujo unidimensional a través de una tobera:



Aplico Bernoulli entre 1 y 2 $\int \frac{dP}{\rho} + g z + \frac{v^2}{2} = cte$

Ec. continuidad $\rho v A = cte$

Entonces $\int \frac{dP}{\rho} + g z + \frac{v^2}{2} = cte \rightarrow c^2 \frac{d\rho}{\rho} + 0 + v dv = 0 \rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = - \frac{v dv}{c^2}$

$$\ln \rho + \ln v + \ln A = cte \rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = - \frac{dv}{v} - \frac{dA}{A}$$

Igualamos

$$\frac{v dv}{c^2} = \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} \rightarrow \frac{dA}{dv} = \frac{A}{v} \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)$$

Finalmente

$$\frac{dA}{dv} = \frac{A}{v} (M^2 - 1)$$

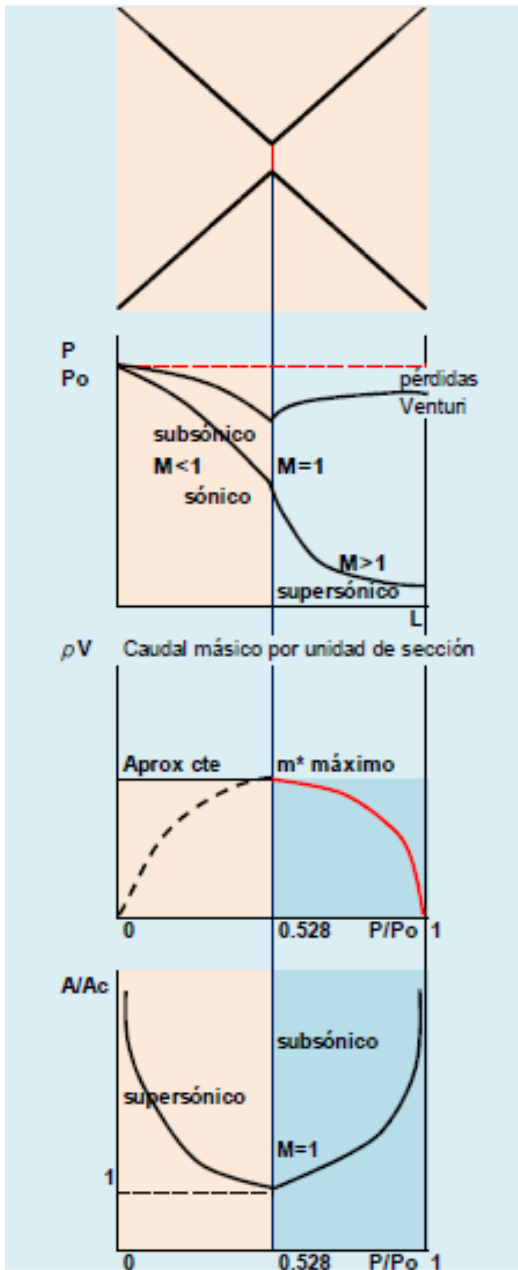
Si $M < 1$ entonces $dA/dv < 0$, a medida que disminuye A, aumenta la velocidad.

Si $M = 1$ entonces $dA/dv = 0$, máxima velocidad para $A_{critica}$, $v \rightarrow c$.

Si $M > 1$ entonces $dA/dv > 0$, la velocidad sigue aumentando.

Entonces si queremos velocidades supersónicas a régimen permanente a partir de un fluido en reposo, deberemos hacerlo pasar por un conducto convergente y luego divergente, obteniendo en Ac la velocidad del sonido.

Si tenemos flujo subsónico la tobera se comporta como una tubo venturi,



-Vemos que el máximo caudal se obtiene para la P crítica.

-Si $P/P_0 \geq P_{\text{crítica}}$ debo utilizar tobera convergente pues la máxima velocidad que puedo alcanzar es $c = \sqrt{k/\rho}$

-Si $P/P_0 < P_{\text{crítica}}$, debo utilizar tobera convergente divergente para poder obtener velocidad supersónica.

Flujo isotérmico

$P \cdot V = \text{cte} = P/\rho$

Aplico Darcy para fluido incompresible $\Delta h = f \frac{L}{D} \frac{v_0^2}{2g}$

Ecuación de continuidad $\rho v = \text{cte}$ para área constante

Perdida de carga:

$$\Delta P = f \frac{L}{D} \frac{\rho v_0^2}{2}$$

$$dP = f \frac{1}{D} \frac{\rho}{2} \frac{\rho v^2}{\rho^2} dx$$

$$\rho dP = \frac{f}{2D} \frac{\rho^2 v^2}{\rho^2} dx$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_1} \int_{P_1}^{P_2} \rho dP = \frac{f}{2D} \frac{\rho_1^2 v^2}{2} \int_0^l dx$$

$$\frac{P_1^2 - P_2^2}{2P_1} = \frac{f l}{D} \frac{\rho_1 v^2}{2}$$

$$\frac{(P_1 - P_2)(P_1 + P_2)}{2P_1} = \frac{f l}{D} \frac{\rho_1 v^2}{2}$$

$$\Delta P = \frac{2P_1}{(P_1 + P_2)} \frac{f l}{D} \frac{\rho_1 v^2}{2}$$

Si $\Delta P \leq 5\% P_1$, entonces considero fluido incompresible.

BOMBAS CENTRÍFUGAS

TEMA 9

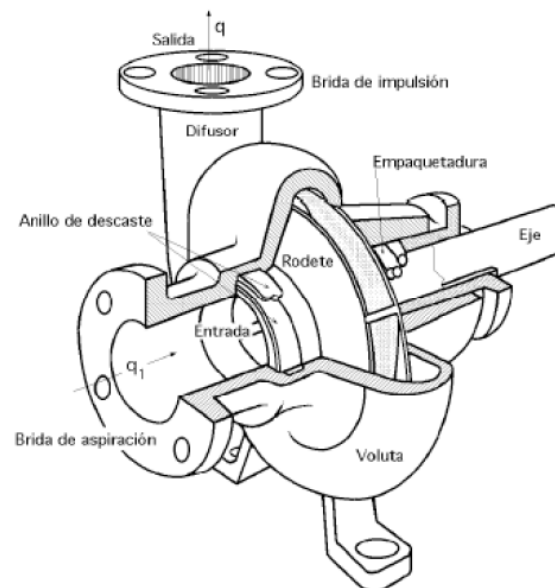
Tema 9 – Bombas centrífugas

Para cambiar la dirección de un fluido o cambiar la magnitud de su velocidad se requiere de la aplicación de fuerzas. Cuando una alabe móvil deflecta un chorro fluido y cambia su momentum, se ejerce fuerza entre el alabe y el chorro, y se genera trabajo tangencial mediante el desplazamiento del alabe. Una turbomaquinaria hace uso de este principio:

- 1- Bombas axiales y centrífugas, ventiladores y compresores, trabajan sobre el fluido dándole energía.
- 2- Turbinas de impulsión y de hélice, extraen energía del fluido

El fluido que intercambia energía, no varía su peso específico sensiblemente.

Elementos componentes:

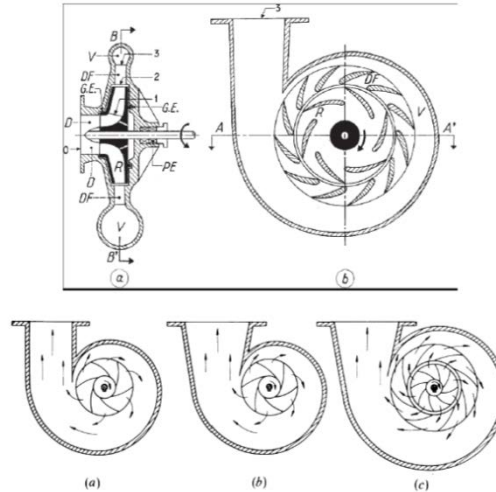


Tenemos entonces desde el punto de vista del diseño, cuatro partes principales:

- 1- Parte hidrodinámica rotatoria (rodete).
- 2- Parte hidrodinámica estatoria (voluta, difusor, distribuidor)
- 3- Parte mecánica giratoria (ejes, cojinetes, sellos)
- 4- Parte mecánica estática (carcaza, soportes).



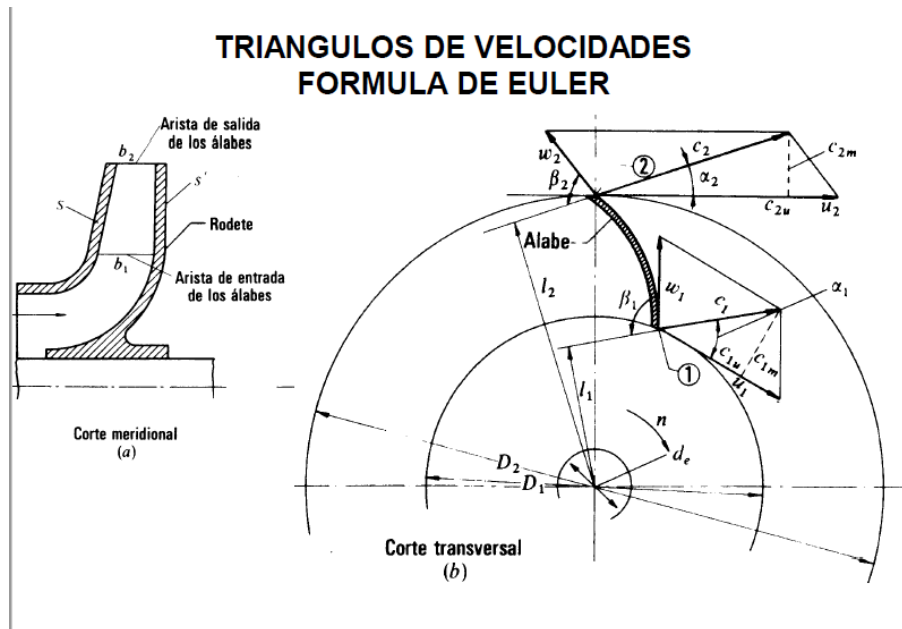
BOMBA CENTRIFUGA (CORTE)



La bomba centrífuga ideal trabaja con fluido incompresible, en régimen turbulento a velocidad inferior a la del sonido, sin pérdidas de energía por lo tanto no hay separación de la capa límite, los alabes son infinitos y lisos. La bomba centrífuga real tiene un número limitado de alabes (6-12) y por lo general hay pérdidas energéticas debido a la rugosidad de las paredes, las viscosidad del fluido, etc.

Ecuación de Euler:

Expresa la cantidad de energía intercambiada en el rodete. Se desprecia la fricción y se supone que el fluido es guiado perfectamente por la maquina, es decir como si existiera un número infinito de alabes delgados y la velocidad relativa por tanto siempre fuera tangente al alabe.



Sea C_1 la velocidad absoluta de una partícula a la entrada de un alabe (y C_2 la velocidad de salida). El rodete gira a un velocidad $U_1 = \omega.R_1 = \pi n D_1 / 60$, (U_2 a la salida) y la partícula que entra al rodete tiene una velocidad relativa tangente al alabe W_1 (W_2 a la salida) ; por lo tanto la velocidad absoluta a la entrada será $C_1 = W_1 + U_1$ ($C_2 = W_2 + U_2$ a la salida)

Vemos que la partícula de fluido ha experimentado un cambio de velocidad creciente de C_1 a C_2 entre la entrada b_1 y la salida b_2 , entonces aplicamos la ecuación de momentum, $F = \rho \cdot Q \cdot (v_2 - v_1)$; el teorema de la cantidad de movimiento, aplicado a una partículas de fluido de tamaño infinitesimal: $dF = \rho dQ (C_2 - C_1)$ y considerando momento respecto al eje de rotación (árbol del motor) $dM = \rho dQ (C_2 l_2 - C_1 l_1)$ siendo $l_2 = r_2 \cos \alpha$ y $l_1 = r_1 \cos \alpha$.

Suponemos que todas las partículas que pasan por el hilo de corriente dQ , entran a una velocidad C_1 y salen con una velocidad C_2 .

Integramos:

$$M = \rho Q (\bar{C}_2 r_2 \cos \alpha - \bar{C}_1 r_1 \cos \alpha) \text{ siendo } C_{u2} = C_2 \cos \alpha \text{ y } C_{u1} = C_1 \cos \alpha.$$

$$M = \rho Q (\bar{C}_{u2} r_2 - \bar{C}_{u1} r_1) \text{ siendo la potencia } N = M \omega$$

Entonces:

$$N = \rho Q \omega (\overline{Cu}_2 r_2 - \overline{Cu}_1 r_1) \text{ siendo } U_2 = r_2 \omega \text{ y } U_1 = r_1 \omega$$

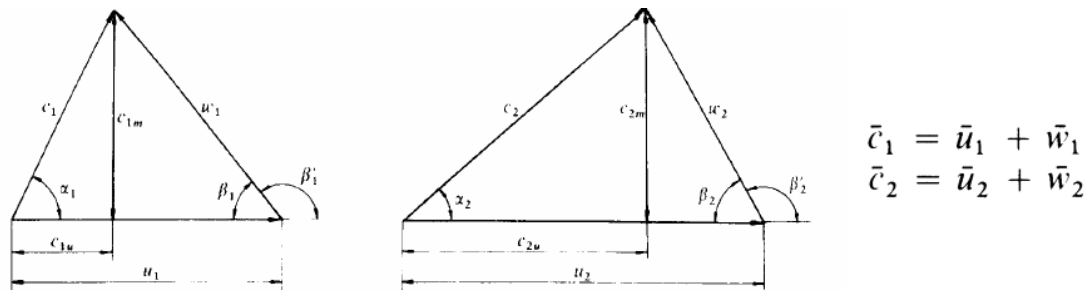
$$N = \rho Q (\overline{Cu}_2 \overline{U}_2 - \overline{Cu}_1 \overline{U}_1) \text{ siendo la potencia } N = \gamma Q H$$

Entonces la altura teórica de la bomba $Ht_\infty = \pm \frac{(\overline{Cu}_2 \overline{U}_2 - \overline{Cu}_1 \overline{U}_1)}{g}$ Ecuación de Euler para turbomaquinaria (+ para bombas y - para turbinas).

La altura de Euler Ht es la energía que absorbe la maquina (motor) y generalmente es igual a Ht_∞ que es la energía específica que da la maquina al fluido.

Segunda forma de la ecuación de Euler (Triángulo de velocidades):

Diagrama vectorial Polar



Por el teorema del coseno: $A^2 = B^2 + C^2 - 2 AB \cos \alpha$

$$\overline{W}_1^2 = \overline{U}_1^2 + \overline{C}_1^2 - 2 \overline{C}_1 \overline{U}_1 \cos \alpha_1 = \overline{U}_1^2 + \overline{C}_1^2 - 2 \overline{Cu}_1 \overline{U}_1$$

$$\overline{W}_2^2 = \overline{U}_2^2 + \overline{C}_2^2 - 2 \overline{C}_2 \overline{U}_2 \cos \alpha_2 = \overline{U}_2^2 + \overline{C}_2^2 - 2 \overline{Cu}_2 \overline{U}_2$$

Entonces:

$$\overline{Cu}_1 \overline{U}_1 = \frac{\overline{U}_1^2 + \overline{C}_1^2 - \overline{W}_1^2}{2} \quad \text{y} \quad \overline{Cu}_2 \overline{U}_2 = \frac{\overline{U}_2^2 + \overline{C}_2^2 - \overline{W}_2^2}{2}$$

Reemplazamos en la Ecuación de Euler

$$Ht_\infty = \pm \left[\frac{\overline{U}_2^2 - \overline{U}_1^2}{2g} + \frac{\overline{C}_2^2 - \overline{C}_1^2}{2g} + \frac{\overline{W}_2^2 - \overline{W}_1^2}{2g} \right]$$

Aplicación del teorema de Bernoulli a la ecuación de Euler

(entre 1 y 2 o sea entrada y salida):

$$\frac{P_1}{\gamma} + Z_1 + \frac{C_1^2}{2g} + H_{t\infty} = \frac{P_2}{\gamma} + Z_2 + \frac{C_2^2}{2g}$$

Dado que $\Delta Z=0$;

$$H_{t\infty} = \frac{P_2 - P_1}{\gamma} + \frac{\bar{C}_2^2 - \bar{C}_1^2}{2g}$$

Entonces comparando con la ecuación de Euler, $H_d = \frac{\bar{C}_2^2 - \bar{C}_1^2}{2g}$ es la altura dinámica y el resto

$H_p = \frac{\bar{U}_2^2 - \bar{U}_1^2}{2g} + \frac{\bar{W}_2^2 - \bar{W}_1^2}{2g}$ es la altura de presión.

Por lo tanto la tercer forma de la Ecuación de Euler: $H_t = H_p + H_d$

Vemos que si se desea no tener grandes pérdidas de energía por rozamiento conviene que $H_p \gg H_d$.

Grado de reacción:

Hay que denotar que la H_p rodete $<$ H_p bomba, pues la bomba convierte la H_d en H_p con el cono difusor, entonces el grado de reacción del rodete es:

$$G_R = \frac{H_p}{H_d} = 1 - \frac{H_d}{H_t}$$

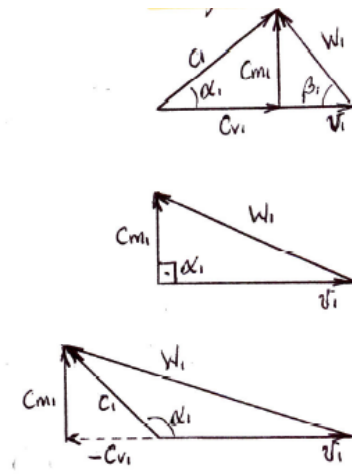
Obviamente $0 \leq G_R \leq 1$ y como dijimos antes lo que se quiere es que G_R tienda a 1 haciendo H_d lo más chico que se pueda.

Maquina de acción $G_R = 0$, turbina Pelton (no tiene ΔP)

Maquina de reacción $G_R = 1$, bombas y ventiladores (H_d tiende a cero)

Influencia de los ángulos y del número de alabes:

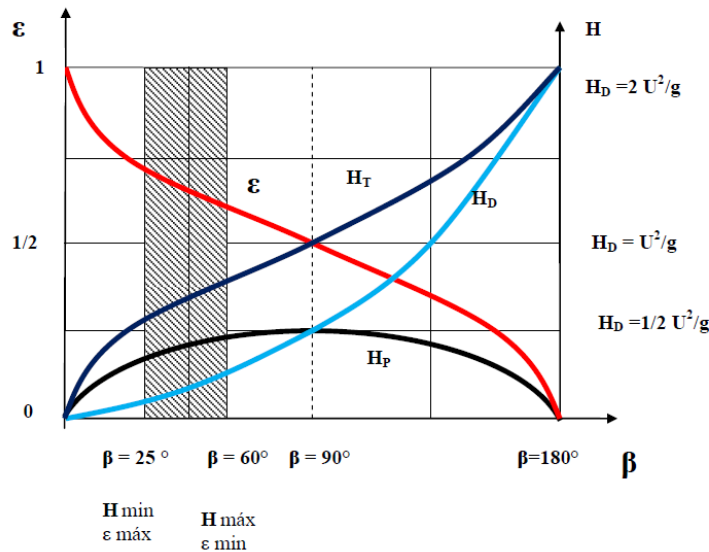
Entrada β_1 , existen tres casos:



Elegimos el segundo caso pues β_1 adquiere valor intermedio y el alabe no es tan largo, pues si bien en el tercer caso obtendríamos la mayor energía de intercambio como β_1 es muy chico, el alabe sería tan largo que toda la energía se perdería por rozamiento (entrada radial).

Salida β_2 , existen tres casos;

Que β_2 sea igual, menor o mayor que 90° :

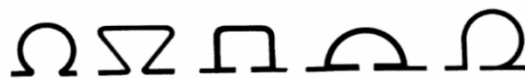


En bombas como lo que se desea es el máximo G_R , es decir que $H_p \rightarrow H_t$ entonces β_2 estara comprendido entre 25° y 60°

Voluta difusora:

Si cumplimos con todas las condiciones marcadas hasta el momento, el movimiento del fluido debe ser irrotacional, cumpliéndose la ley de Drall, $r \cdot C_u = cte$; retomando la ecuación de momentum $T = m (r_2 C_{u2} - r_1 C_{u1})$, entonces cuando T es positivo el momento del fluido aumenta en el volumen de control (bomba), por el contrario cuando T es negativo el momento del fluido disminuye (turbina). Cuando $T = 0$, como en los pasaje sin alabes $r C_u = cte$ que es un movimiento de vórtice libre, donde la componente tangencial de la velocidad varia inversamente con el radio.

En la voluta el radio medio va aumentando hacia la salida por lo tanto C_u se va achicando, es decir que cuando va llegando el fluido al cono difusor la energía cinetica se transforma en energía de presión.



Aplicando la ley de Drall:

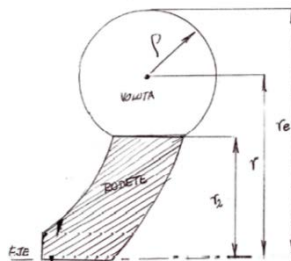
$$C_u = \frac{k}{r} = \frac{k}{r_2 + \rho} \quad y \quad \frac{Q_\varphi}{\varphi^\circ} = \frac{Q}{360^\circ} \cdot 1,1$$

Entonces el caudal: $Q_\varphi = \frac{k}{r_2 + \rho} \pi \rho^2 = \frac{1,1 Q \varphi}{360^\circ}$

Operando matematicamente: $k \pi \rho^2 - \frac{1,1 Q \varphi}{360^\circ} r_2 - \frac{1,1 Q \varphi}{360^\circ} \rho = 0$

siendo $A = \frac{1,1 Q}{360^\circ k \pi}$ nos queda $\rho^2 - A \varphi r_2 - A \varphi \rho = 0$

Para cada diámetro tengo un ρ . A cada r_2 le sumo ρ y saco el r_{med} de la voluta espiral, que evitara el desprendimiento de la capa limite.



$$\rho^2 - A \varphi \cdot r_2 - A \varphi \rho = 0$$

Ecuación de 2º GRADO
Incongnita ρ ($\varphi \uparrow, \rho \uparrow$) $\uparrow S_x, \downarrow vel \rightarrow E_c \rightarrow E_p$

Cono difusor:

Tiene sección divergente, en él se asegura toda la conversión de energía cinética a energía de presión. El cono debe abrirse aproximadamente 8° , no más pues podría desprenderse la capa límite. La salida del difusor es aproximadamente igual a la salida del rodete, entonces toda la energía ganada es de presión.

Leyes de semejanza:

Dos bombas funcionando en iguales condiciones son semejantes si existen las tres condiciones simultáneas:

Semejanza geométrica, iguales escalas

Semejanza cinemática, triángulos de velocidades semejantes

Semejanza dinámica, iguales números de Reynolds.

De acuerdo a estas leyes podemos:

- a- Predecir el comportamiento de bombas de distintos tamaños con iguales Q N H
- b- Predecir el comportamiento de dos bombas de igual tamaño pero distintos Q N H

CAUDAL

$$Q = C_m \pi D b = n D \pi D D$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{n_1 D_1^3}{n_2 D_2^3}$$

ALTURA (según Euler)

$$H_t = \frac{U_2 C u_2}{g} = \frac{n D n D}{g}$$

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{n_1^2 D_1^2}{n_2^2 D_2^2}$$

POTENCIA (vinculamos las ecuaciones Q y H)

$$N = \frac{Q \gamma H}{75 \eta}$$

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{n_1^3 D_1^5}{n_2^3 D_2^5}$$

Luego para una misma bomba en distintas condiciones:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad \frac{H_1}{H_2} = \frac{n_1^2}{n_2^2} \quad \frac{N_1}{N_2} = \frac{n_1^3}{n_2^3}$$

Y para dos bombas a iguales rpm:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{D_1^3}{D_2^3} \quad \frac{H_1}{H_2} = \frac{D_1^2}{D_2^2} \quad \frac{N_1}{N_2} = \frac{D_1^5}{D_2^5}$$

NSQ – número específico de vueltas:

Trabajamos un poco en la ecuación de relación de alturas: $\frac{D_1}{D_2} = \frac{n_2}{n_1} \frac{H_1^{1/2}}{H_2^{1/2}}$

Y reemplazamos en la ecuación de caudales: $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{n_2^2 H_1^{3/2}}{n_1^2 H_2^{3/2}}$ o $\frac{Q_1^{1/2}}{Q_2^{1/2}} = \frac{n_2 H_1^{3/4}}{n_1 H_2^{3/4}}$

Finalmente

$$\frac{n_1 Q_1^{1/2}}{H_1^{3/4}} = \frac{n_2 Q_2^{1/2}}{H_2^{3/4}} = cte \text{ para un serie de bombas semejantes}$$

1er Definición: tomamos una bomba estándar $H_s = 1$ m y $Q_s = 1$ m³/s, entonces $\frac{n_{sq} Q_s^{1/2}}{H_s^{3/4}} = cte$

Y como $\frac{n_{sq} 1^{1/2}}{1^{3/4}} = \frac{n Q^{1/2}}{H^{3/4}} = cte$ entonces $n_{sq1} = \frac{n Q^{1/2}}{H^{3/4}} = cte$

para cualquier bomba y cualquier fluido.

2da Definición: tomamos una bomba estándar $H_s = 1$ m, $N_s = 1$ CV, Peso específico del agua = 1000 kgf/m³, entonces: $Q_s = \frac{75\eta N_s}{\gamma H_s} = 0,075 \frac{m^3}{seg}$

Y como $\frac{n_{sq} 0,075^{1/2}}{1^{3/4}} = \frac{n Q^{1/2}}{H^{3/4}} = cte$

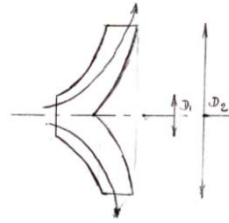
Llamamos número específico de vueltas $n_{sq2} = 3,65 \frac{n Q^{1/2}}{H^{3/4}} = cte$

Entonces $n_{sq2} = 3,65 n_{sq1}$

Rodetes:

Radial (n_s bajo, útil para grandes presiones)

Bombas centrífugas, turbinas de impulso.



FLUJO DESVIADO
RADIALMENTE

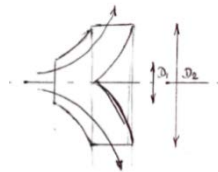
n_s bajo

$1,7 < D_2/D_1 < 2,3$

$\uparrow H \downarrow Q$

Semiradial o semiaxial (n_s medio, útil para obtener Q y H intermedios)

Bombas de flujo mixto, turbina Francis



FLUJO MIXTO
RADIOAXIAL

n_s medio

$1,3 < D_2/D_1 < 1,7$

Eq entre Q y H

Axial (n_s alto, útil para grande caudales)

Bombas de flujo axial, turbina de hélice



FLUJO AXIAL

n_s alto

$D_2/D_1 \approx 1$

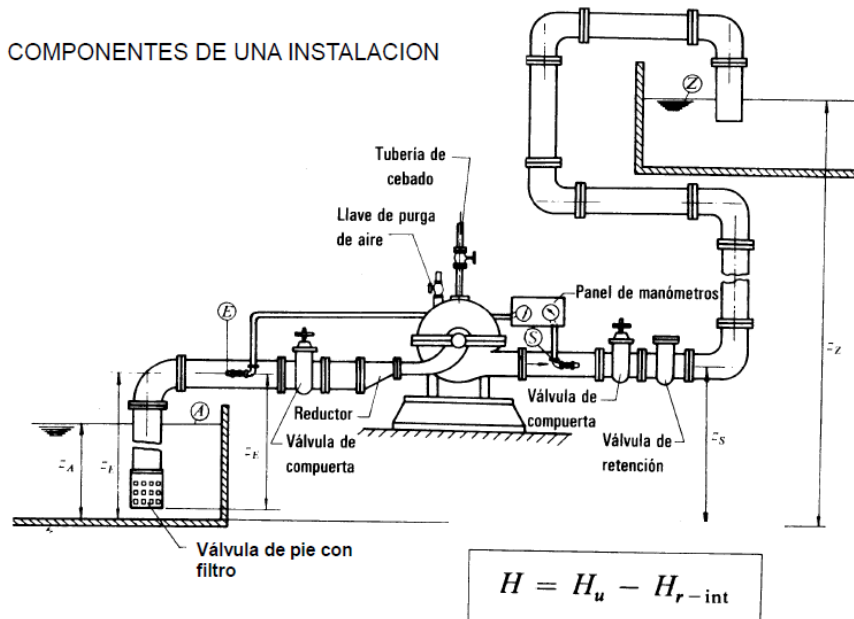
$\uparrow Q \downarrow H$

Golpe de ariete y cavitación en la bomba – Máxima altura de aspiración H_s :

Cavitación:

ALTURA DE ELEVACION DE LA BOMBA

COMPONENTES DE UNA INSTALACION



Aplico Bernoulli entre a y e:

$$\frac{P_a}{\gamma} + Z_a + \frac{V_a^2}{2g} = \frac{P_e}{\gamma} + Z_e + \frac{V_e^2}{2g} - hp_{asp}$$

$$\frac{P_e}{\gamma} = \frac{P_a}{\gamma} - (Z_e - Z_a) - \frac{V_e^2}{2g} - hp_{asp}$$

Sabemos que $\frac{P_x}{\gamma} = \frac{P_e}{\gamma} - \Delta h$ y $H_s = Z_e - Z_a$

entonces:

$$\frac{P_{vs}}{\gamma} = \frac{P_a}{\gamma} - (Z_e - Z_a) - \frac{V_e^2}{2g} - hp_{asp} - \Delta h$$

Luego la altura de máxima de suspensión o altura máxima a la que puedo elevar la bomba de Z_a (o bajar si H_s es negativo) será:

$$H_s = \frac{P_a}{\gamma} - \frac{P_{vs}}{\gamma} - \frac{V_e^2}{2g} - hp_{asp} - \Delta h$$

O sea que para evitar la cavitación será necesario que $P_a \gg P_{vs}$, que la V_e sea pequeña, y que las pérdidas h_{pasp} y Δh sean pequeñas también.

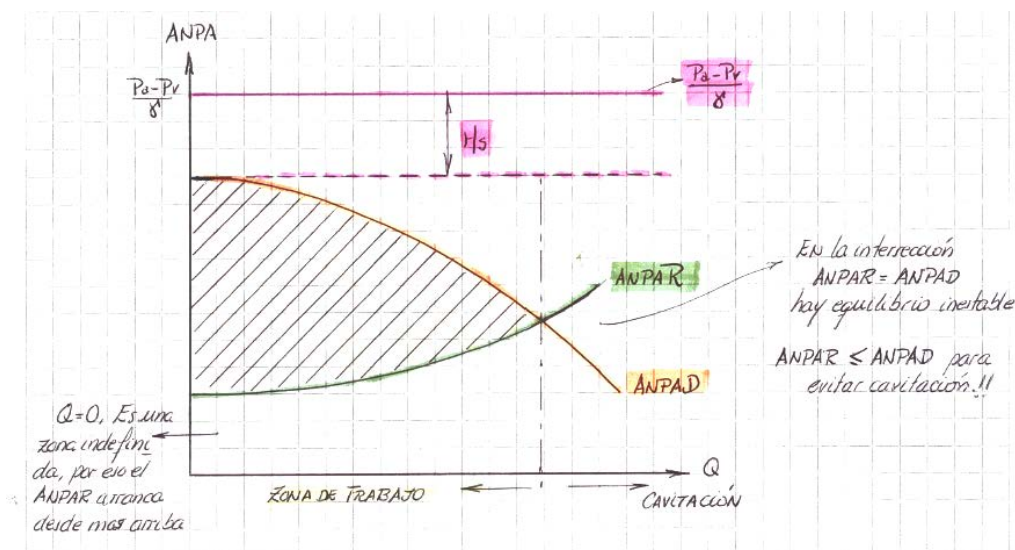
Aspiración NPSH o ANPA (Altura neta de succión positiva o Altura neta positiva de aspiración):

ANPA disponible: es la energía en metros de columna de agua líquida bombeada que debe haber disponible por encima de la P_{vs} para evitar que se inicie la cavitación.

$$ANPA_D = \frac{P_a}{\gamma} - \frac{P_{vs}}{\gamma} \pm H_s - \frac{V_e^2}{2g} - h_{pasp}$$

ANPA requerido: depende de la instalación, por tanto del fabricante de la bomba. Es la energía cuyo valor debe ser tal que a la entrada de la bomba la presión no sea menor que P_{vs} del líquido bombeado, es decir es la energía que requiere la bomba para trabajar bien, y vencer la fricción.

$$ANPA_R = \Delta h = \frac{k_1 c_1^2}{2g} + \frac{k_2 w_1^2}{2g}$$



Lo recomendable es que el $ANPA_D > ANPA_R$, por lo general una bomba con gran caudal tiene gran tendencia a cavitatar. El $ANPA_R$ aumenta con el caudal, y el $ANPA_D$ disminuye con Q .

Golpe de ariete:

Se produce en la impulsión cuando se para la bomba con la columna líquido en el tramo de impulsión (en la aspiración se produce cavitación).

Soluciones:

- Cerrar lentamente la válvula de impulsión
- Usar diámetro de impulsión grande, entonces tendremos Vel impulsión pequeña
- Usar una 2da válvula "by pass".
- Usar un volante en el motor

Curvas características:

Curva teórica, Cabeza H - Caudal Q:

Teniendo en cuenta los triángulos de velocidades, sabemos:

$$C_{u2} = C_2 \cos \alpha_2 = U_2 - C_{m2} \cotg \beta_2$$

Para la descarga si b_2 es el ancho del impulsor en r_2 y se desprecia el espesor de los alabes,

$Q = 2\pi r_2 b_2 C_{m2}$, eliminando C_{m2} y teniendo en cuenta ec Euler.

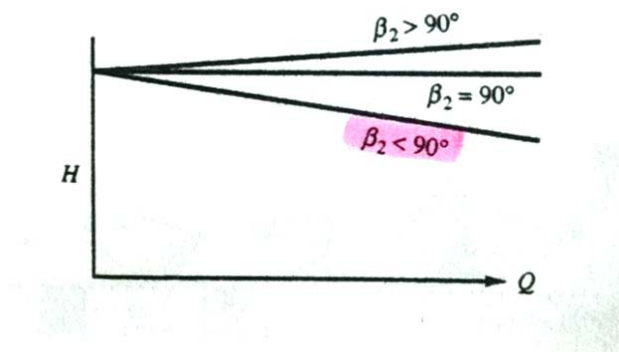
$$H_t = \frac{U_2^2}{g} - \frac{U_2 Q \cotg \beta_2}{2\pi r_2 b_2 g}$$

Por esto cuando:

$\beta_2 < 90^\circ$, disminuye H con el aumento de Q

$\beta_2 = 90^\circ$, H = cte, con el aumento de Q

$\beta_2 > 90^\circ$, aumenta H cuando disminuye Q



Curva real, Cabeza H – Caudal Q:

Debemos restar las pérdidas de cabeza de la curva teórica H-Q, obteniéndose la curva real H-Q. La parte más importante de la diferencia no es una pérdida real, es la imposibilidad que el número infinito de álabes imparta la velocidad relativa con un ángulo β_2 en los álabes. Sin una guía perfecta (infinitos álabes), el fluido descarga como si los álabes tuvieran un ángulo β_2' , el cual es menor que β_2 para el mismo caudal, se reduce C_2u por lo tanto disminuye la cabeza real producida (flujo circulatorio).

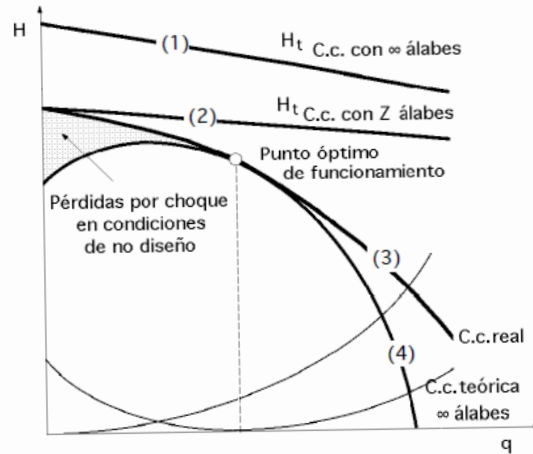
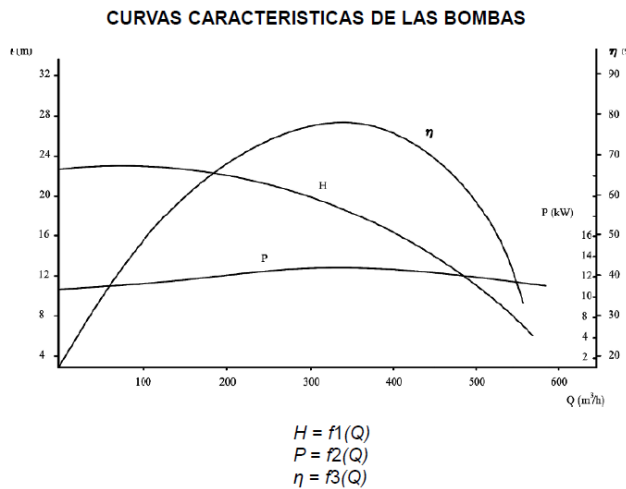
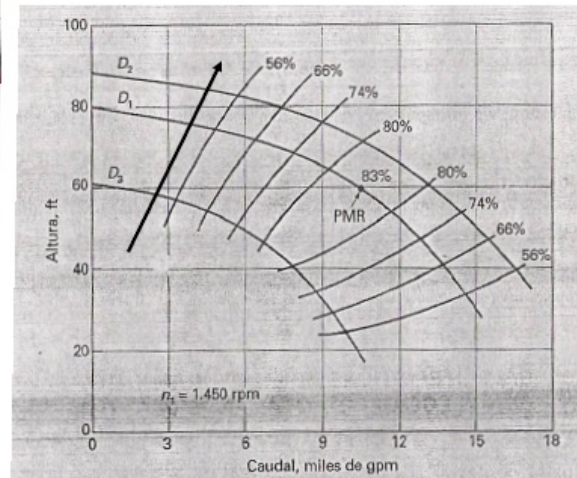
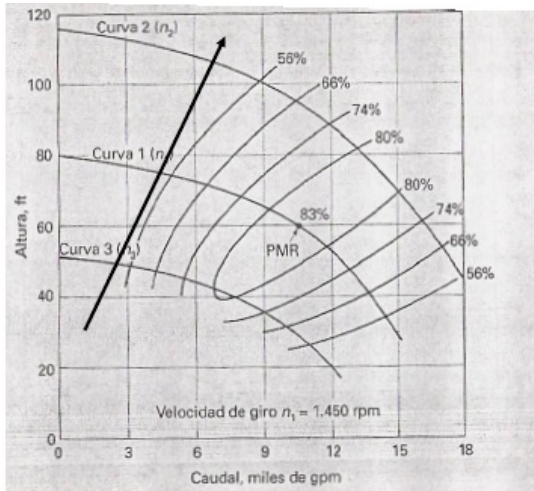


Fig I.10.- Deducción de la c.c de una bomba con $\beta_2 < 90^\circ$

Curva característica H, N, $\eta = f_c(Q)$

En general las bombas no son tan eficientes como la turbinas, debido a las altas perdidas inherentes que son resultado de la conversión de energía cinética en energía de flujo.





Ventiladores

El fluido no se comprime cuando atraviesa, por lo tanto se aplican las leyes de las turbomaquinarias. Por el contrario el compresor es una maquina térmica.

Características:

$25^\circ < \beta_2 < 160^\circ$

Diámetro grande

Más económico (uso chapa soldada para la hélice, inclinación hacia adelante en el sentido de giro)

Tipos:

Baja presión, $0 < \Delta P < 100$ mm col agua

Media presión, $100 < \Delta P < 300$ mm col agua

Alta presión, $300 < \Delta P < 1000$ mm col agua

FLUJO SOBRE CUERPOS SUMERGIDOS

TEMA 10

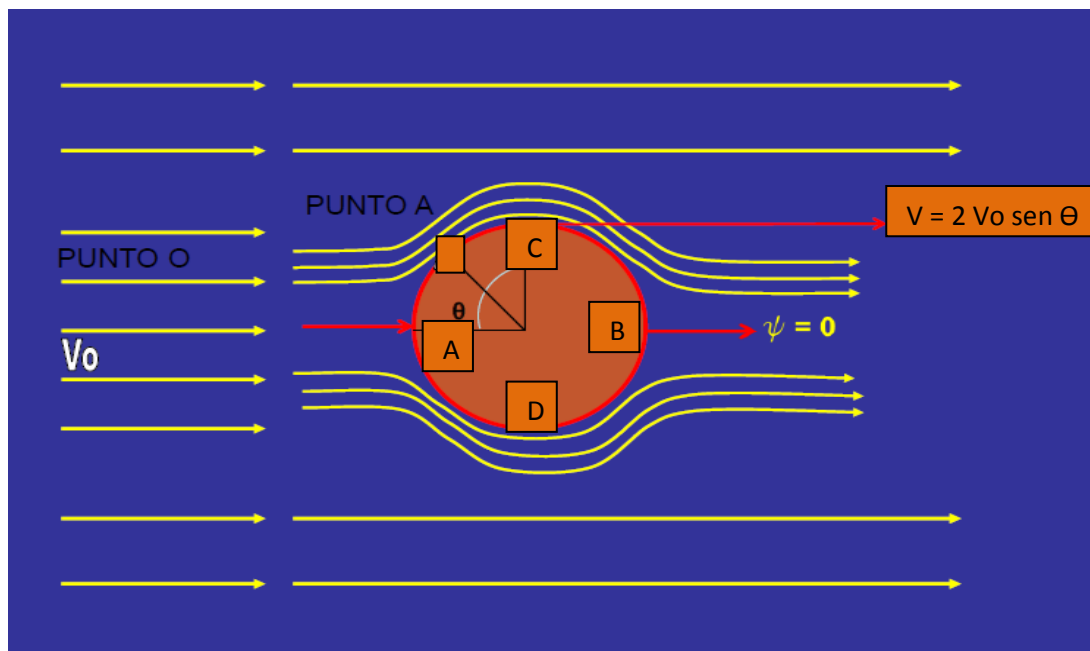
Tema 10 – Flujo sobre cuerpo sumergidos

Estudiaremos los efectos generados sobre un cuerpo cuando se desplaza en el seno de un fluido, también veremos la distribución de velocidad alrededor del cuerpo (sin deslizamiento), y arrastre-sustentación, estas dos últimas son de gran aplicación en el diseño de alas, autos, buques, edificios, transporte de partículas, mecánica de erosión, etc.

Distribución de velocidades alrededor de un cilindro circular:

Supongamos un fluido ideal con flujo irrotacional:

Cilindro quieto: según se vio en doblete $v_1 = 2 v_o \text{ sen } \theta$, aplico Bernoulli entre un punto alejado 0 y un punto cercano al cilindro, $\Delta Z = 0$:



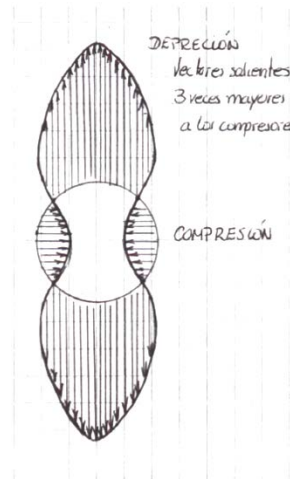
$$\frac{P_o}{\gamma} + \frac{v_o^2}{2g} = \frac{P}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \quad \text{o} \quad \Delta P = \frac{\rho}{2} (v_o^2 - v^2) \quad \text{o} \quad \Delta P = \frac{\rho v_o^2}{2} (1 - 4 \text{sen}^2 \theta)$$

Llegamos a la ecuación de variación de la presión alrededor de un cilindro.

Vemos que en C o D, $\theta = 90^\circ$ entonces $\Delta P = -3 \frac{\rho v_o^2}{2}$ o sea hay depresión

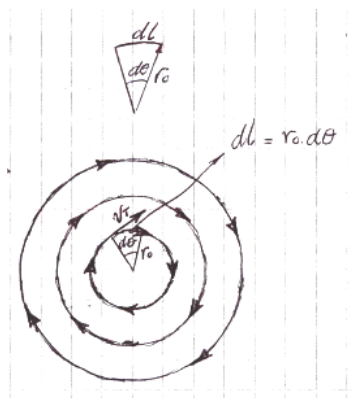
Vemos que en A o B, $\theta = 0^\circ$ entonces $\Delta P = \frac{\rho v_o^2}{2}$ o sea hay presión

Diagrama polar o de presiones. Como el diagrama es simétrico o equilibrado, no hay fuerza resultante, (empuje o arrastre).



Cilindro rotando con velocidad angular ω :

Definimos circulación como el flujo a lo largo de una curva cerrada.



$$\Gamma = \oint v_c dl = \int_0^{2\pi} v_c r_o d\theta = 2\pi r_o v_c \quad \therefore \quad v_c = \frac{\Gamma}{2\pi r_o} = v_t$$

Llegamos a la velocidad de circulación o velocidad tangencial o velocidad de torbellino, la cual es inversamente proporcional al radio.

Combinación de efectos:

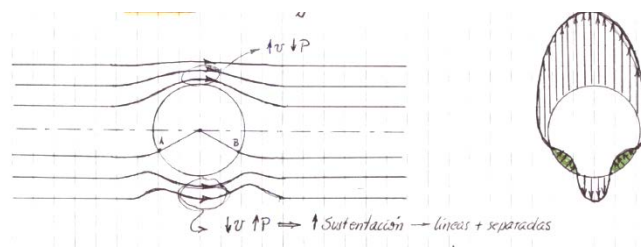
Si combinamos los dos efectos anteriores, el diagrama de presiones se hace asimétrico pues hay superposición de efectos.

Sustentación: $v_1 = 2 v_o \text{ sen } \theta + v_t$, igualamos a cero en los puntos de estancamiento:

$$\frac{v}{v_t} = 0 = \frac{2 v_o \text{ sen } \theta}{v_t} + 1 \quad \text{entonces} \quad \text{sen } \theta = -\frac{1}{2} \frac{v_t}{v}$$

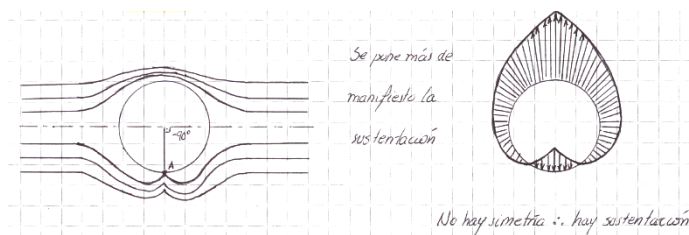
Pueden presentarse tres casos:

Caso 1: $V_t = V_o$ entonces $\text{sen } \theta = -1/2$, para $\theta = -30^\circ$ o $\theta = -150^\circ$



Vemos que hay una fuerza resultante según eje y, que es la F sustentación, mientras que según eje x, la F arrastre es nula.

Caso 2: $V_t = 2V_o$ entonces $\text{sen } \theta = -1$, para $\theta = 270^\circ$ o $\theta = -90^\circ$



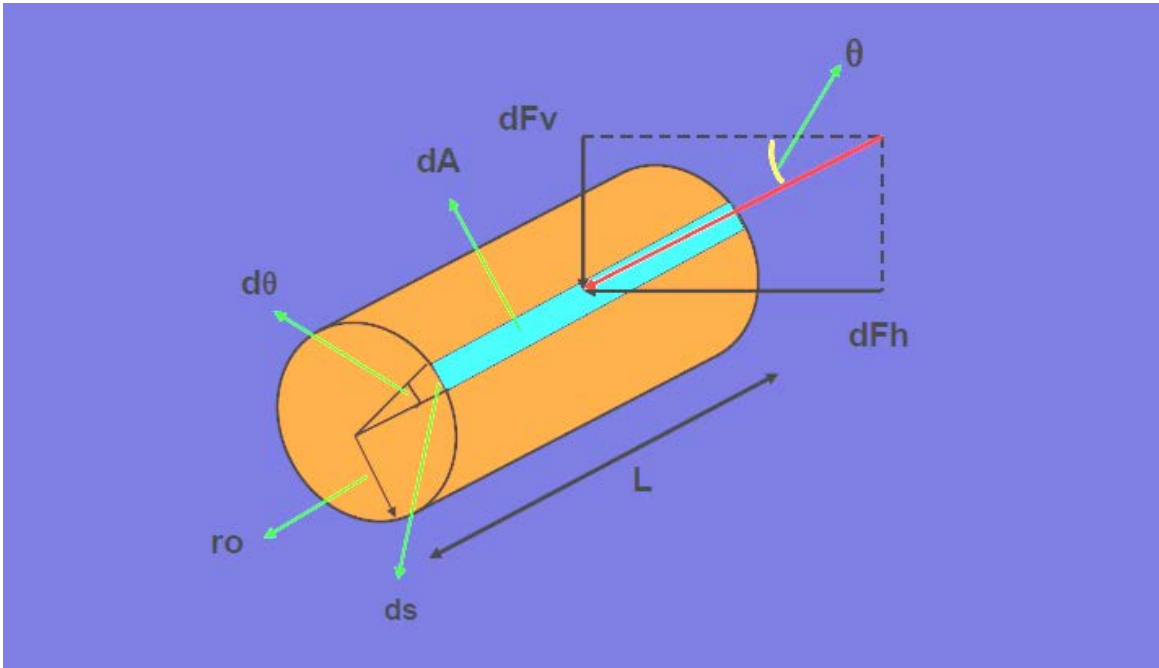
Vemos que se juntan los puntos de estancamiento abajo del cilindro, por tanto se manifiesta más aun la sustentación hacia arriba.

Caso 3: $V_t > 2V_o$ entonces $\text{sen } \theta > 1$,



Vemos que no hay punto de impacto, y hay un gran desbalanceo (mayor hacia arriba).

Caso general – Ecuación de Kutta-Jukowsky:



Trabajamos solo con la componente vertical (la horizontal se anula):

$$S = \int -dF_v = \int_0^{2\pi} \Delta P r_o d\theta L \text{sen } \theta ,$$

pero $\Delta P = \frac{\rho}{2} (v_o^2 - v^2)$ y $v = 2 v_o \text{sen } \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_o}$

$$S = L r_o \frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} \left(v_o^2 - \left(2 v_o \text{sen } \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_o} \right)^2 \right) \text{sen } \theta d\theta$$

$$S = L r_o \frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} v_o^2 \text{sen } \theta d\theta - L r_o \frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} 4 v_o^2 \text{sen}^3 \theta d\theta$$

$$- L r_o \frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} 2 v_o \text{sen}^2 \theta \frac{\Gamma}{\pi r_o} d\theta - L r_o \frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 r_o^2} \text{sen } \theta d\theta$$

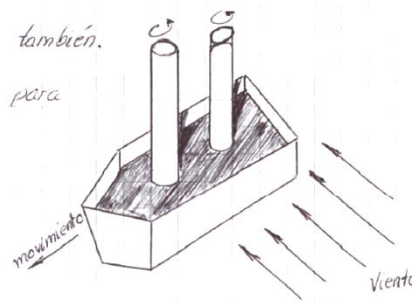
$$S = L r_o \frac{\rho}{2} \left[0 - 0 - \int_0^{2\pi} 2v_o \operatorname{sen}^2 \theta \frac{\Gamma}{\pi r_o} d\theta - 0 \right]$$

$$S = L r_o \frac{\rho}{2} \left[- \frac{2v_o \Gamma}{\pi r_o} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \theta d\theta \right] \rightarrow S = L \rho v_o \Gamma$$

Vemos que Kutta-Jukowsky determina una fuerza resultante vertical, es decir como si no existiera el arrastre que esta siempre presente en mayor o menor grado; el caso real sería que la fuerza resultante este inclinada dando dos componentes S y A perpendiculares, que no se calculan sino que se miden.

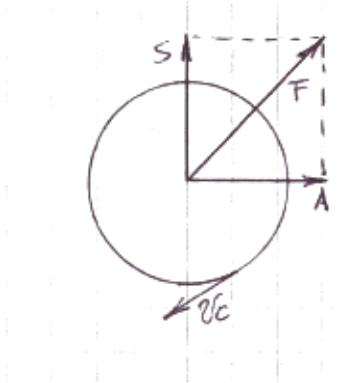
Efecto Magnus – Empuje Ascensional:

Este efecto se estudio en balas de cañon esféricas, cuando son lanzadas se combinan los efectos de velocidad de doblote con la velocidad de torbellino, dando un diagrama asimétrico de presiones, de sustentación hacia arriba sin arrastre teóricamente. En la realidad la fuerza actua inclinada, pues si hay arrastre.



Coeficiente de resistencia (C_D) y coeficiente de sustentación (C_L):

Como se aclaró en Kutta-Jukowsky, S no es la única fuerza que actúa sino que también existe una componente horizontal, llamada A (arrastre).



$$S = C_L Area \frac{\rho v^2}{2}$$

$$A = C_D Area \frac{\rho v^2}{2}$$

S : resultante de fuerzas verticales

A : resultante de fuerzas paralelas al movimiento del fluido que ejerce un succión retardante sobre el cuerpo.

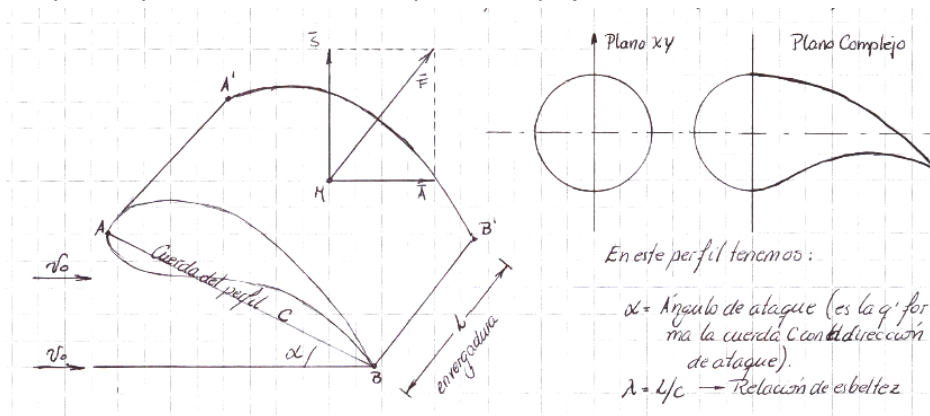
C_L debe su valor a las características del flujo.

C_D contempla la resistencia de superficie y de forma.

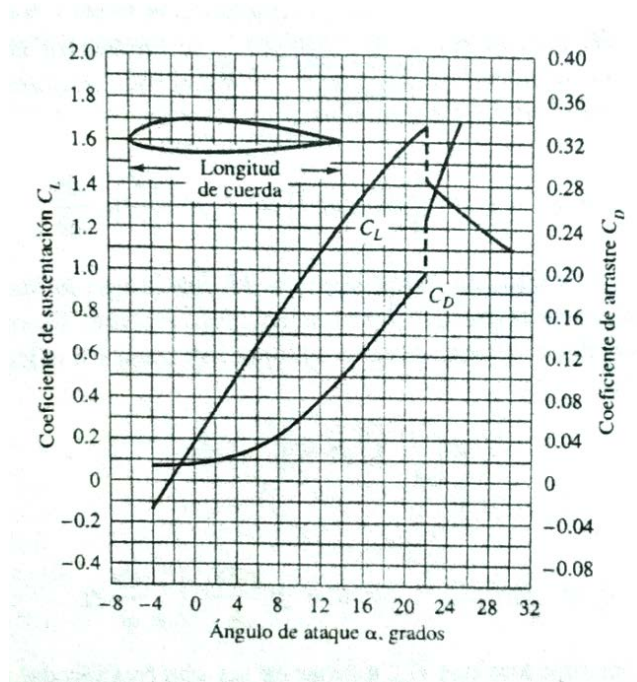
En el diseño de cuerpos en sustentación lo que se quiere es crear una gran S y un bajo A .

Perfil alar:

Jukowsky a través de de una transformada conforme usando variables complejas obtuvo del cilindro en el plano xy, una forma alar en el plano complejo.

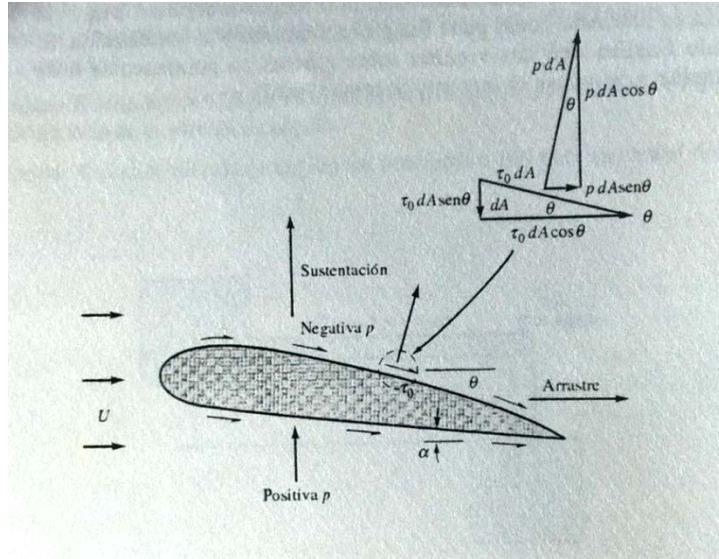


Sabemos que en el diseño de un perfil alar se desea aumentar la sustentación y minimizar el arrastre. Además sabemos que la capa límite no se desprende para ángulos pequeños y que la falta de simetría produce sustentación para $\theta = 0$. Al aumentar θ el gradiente adverso crece y la capa límite se desprende, mucho antes del borde de fuga. Aproximadamente a 20° se logra una sustentación máxima, luego un aumento de θ hace decaer C_L y aumentar C_D (punto muerto). Para aumentar el arrastre o la sustentación se usan dispositivos en las alas, al aterrizar o al despegar.



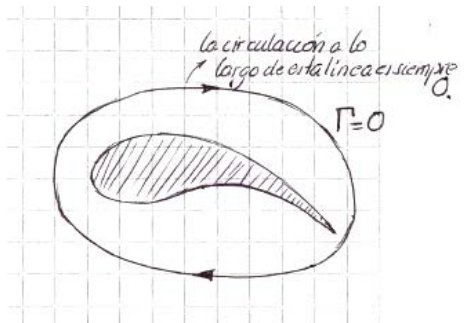
Causa de sustentación en el perfil alar:

Aparentemente no hay circulación en un perfil alar, entonces si $\Gamma = 0$, $S = 0$, pero si vemos la distribución de flujo alrededor de un perfil alar, hay sustentación.

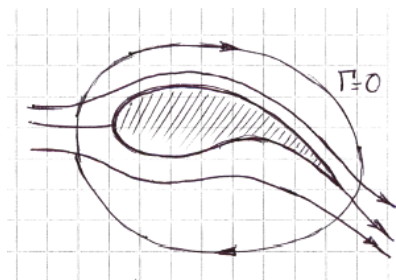


En un perfil alar cuando se inicia el vuelo se distinguen tres tiempos:

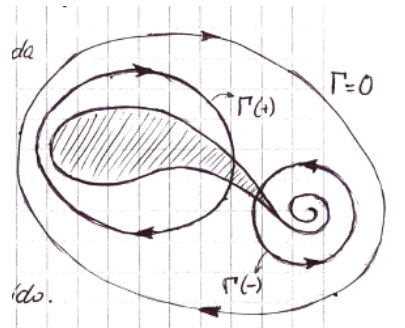
Tiempo 0: el fluido esta en reposo, $v_0 = 0$ y $\Gamma = 0$



Tiempo 1: al iniciar el movimiento el fluido se mueve con MRU y velocidad v_0 , y $\Gamma = 0$. No hay aun torbellino en el borde de fuga.



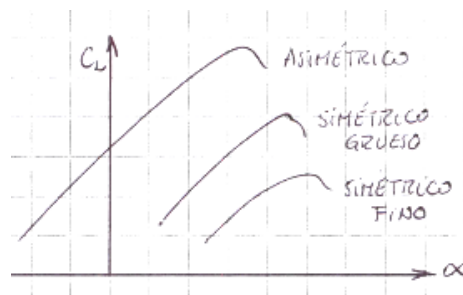
Tiempo 2: en un fluido real la viscosidad origina en el borde de fuga la separación y esta un torbellino con $\Gamma \neq 0$.



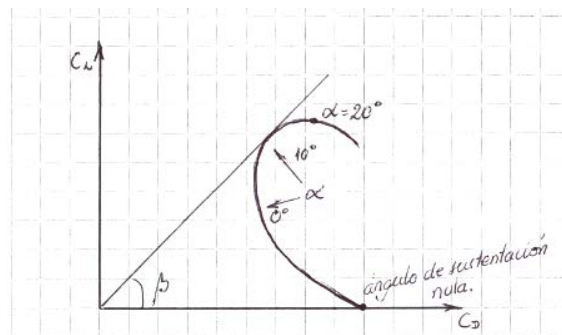
Tipos de perfiles:

Asimétrico, presentan mayor sustentación y arrastre

Simétrico (grosso o fino), presentan menor sustentación y arrastre



Curva polar de un perfil alar:



Grafica C_L vs C_D para distintos ángulos de ataque.

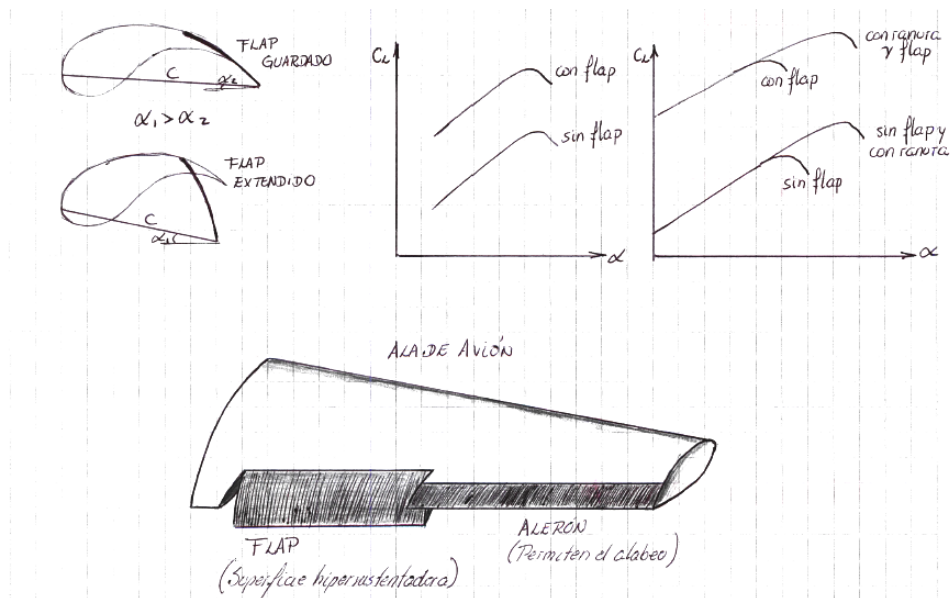
Permite estimar el rendimiento aerodinámico $\eta_{aero} = C_L / C_D = \text{tg } \beta$

Vemos que el máximo C_L para el mínimo C_D da el ángulo β máximo, (β es el ángulo de planeo).

Dispositivos hipersustentadores:

En el momento del despegue, Θ puede adquirir varios valores por lo tanto se sobrepasa $\Theta_{max}=20^\circ$, la capa límite deja de aumentar y hay un desprendimiento prematuro de la capa límite. Para solucionar estos problemas se utiliza:

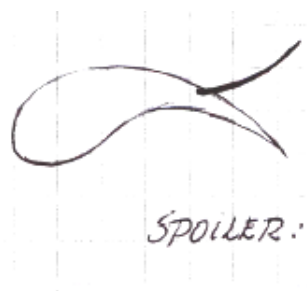
- Sopladores: empujan con aire a presión la capa límite hacia atrás.
- Absorbedores: absorben moléculas detenidas, y dejan pasar las de alta velocidad.
- Ranuras: el aire que la atraviesa, arrastra la capa límite hacia atrás.
- Flaps: modifican el perfil, aumentando la cuerda por lo tanto la sustentación.



Dispositivos hiposustentadores:

Se utilizan en el aterrizaje o en autos pues disminuye S y aumenta A, son dispositivos que provocan desprendimiento de la capa límite. También sirven para dar giros.

- Spoiler
- Freno aerodinámico



Resistencia a la velocidad sónica y supersónica. Ondas de choque. Temperatura y presión en los puntos de estancamiento a velocidad supersónica:

En los puntos de ataque la energía cinética se transforma en energía de presión, pues $v_A = 0$ entonces aplicando Bernoulli entre el punto alejado y el punto estanco A para flujo adiabático, nos queda:

$$\frac{k}{k-1} \frac{P}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = cte \rightarrow \frac{k}{k-1} \frac{P}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \frac{k}{k-1} \frac{P_A}{\gamma_A}$$

$$\text{sabemos que } \frac{P}{\rho} = RT, \text{ y } R = c_p - c_v, \text{ y } k = \frac{c_p}{c_v}$$

$$\frac{\frac{c_p}{c_v}}{\frac{c_p}{c_v} - 1} (c_p - c_v) T + \frac{v^2}{2} = \frac{\frac{c_p}{c_v}}{\frac{c_p}{c_v} - 1} \frac{P_A}{\gamma_A}$$

$$c_p T + \frac{v^2}{2} = \frac{c_p}{R} \frac{P_A}{\gamma_A} \rightarrow c_p T + \frac{v^2}{2} = c_p T_A$$

$$\text{dividimos por } c_p \quad T_A = T + \frac{v^2}{2c_p}$$

$$\text{sabemos que } c = \sqrt{kRT} = \sqrt{\frac{c_p}{c_v} (c_p - c_v) T} \quad \text{y} \quad \frac{c^2}{(k-1)} = c_p$$

$$T_A = T \left[1 + M^2 \frac{(k-1)}{2} \right]$$

Para el aire:

$$T_A = T [1 + 0,2 M^2]$$

$$P_A = P [1 + 0,2 M^2]^{k/(k-1)}$$

Vemos que estas ecuaciones dan P y T en los puntos de estancamiento. Por ejemplo en un transbordador espacial que ingresa a la atmosfera a $P=1 \text{ atm}$ y $T=-50^\circ\text{C}$, $M=10$; alcanza una temperatura $T_A = 4600^\circ\text{K}$, por este es que se usa revestimiento cerámicos.

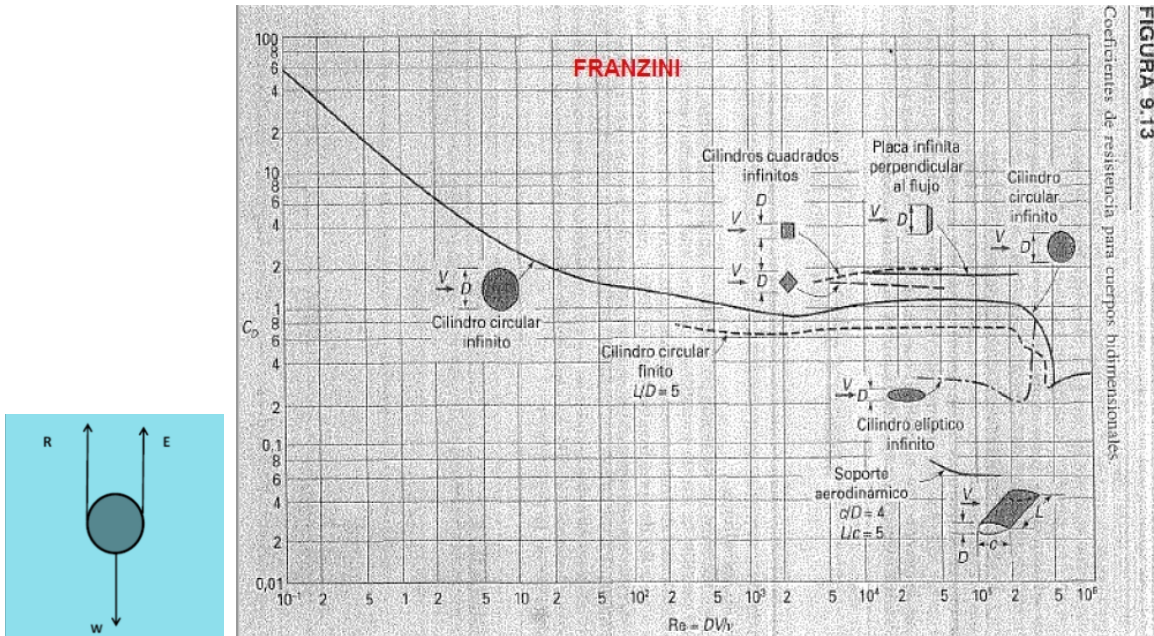
Perfiles:

Vuelo subsónico (ondas de compresión), perfil redondeado asimétrico como el alar.

Vuelo supersónico (ondas de depresión), perfil con marcados ángulos agudos.

Ley de Stokes. Velocidad de sedimentación:

Esta ley permite determinar la velocidad de sedimentación de partículas (polvo), flujo de liquido con sólidos en suspensión, las condiciones de flujo son de velocidad muy lenta y $Re < 1$. Consideramos una partícula esférica:



En el equilibrio alcanza una velocidad constante, entonces $\sum F_y = 0$: **W = Rf + E**

$$\frac{4}{3} \pi r_e^3 \gamma_e = C_f A \frac{\rho v o^2}{2} + \frac{4}{3} \pi r_e^3 \gamma_f$$

$$\frac{4}{3} \pi r_e^3 (\gamma_e - \gamma_f) = \frac{24}{\frac{\rho D v}{\mu}} \frac{\pi D^2}{4} \frac{\rho v o^2}{2}$$

$$\frac{4}{3} \pi r_e^3 (\gamma_e - \gamma_f) = 3 \pi \mu D v$$

$$\frac{4}{3} \pi r_e^3 (\gamma_e - \gamma_f) = 3 \pi \mu 2r_e v$$

$$v = \frac{2}{9} \frac{r_e^2}{\mu} (\gamma_e - \gamma_f)$$

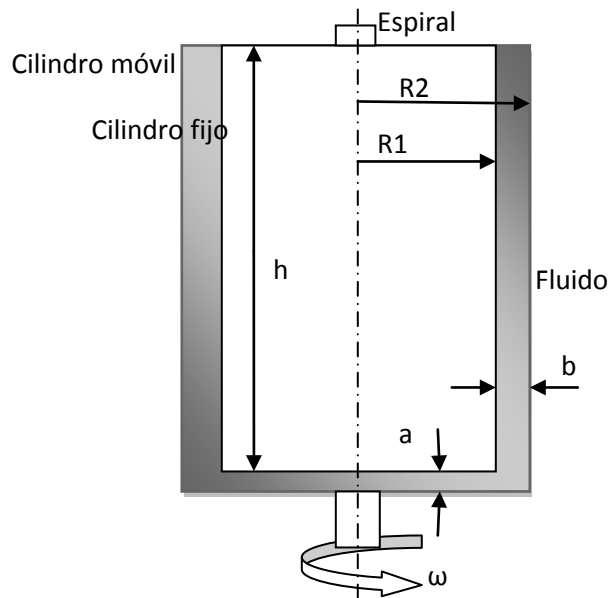


EJERCICIOS EJEMPLIFICATIVOS

Trabajo Práctico n° 1 – Propiedades de los fluidos

Problema N°2

Un cilindro de radio exterior, $r_e=12.0$ cm, gira concéntricamente en el interior de un cilindro fijo de radio interior, $r_i =12.6$ cm. Ambos cilindros tienen una altura $h = 30$ cm. Determinar la viscosidad absoluta de un líquido que llena el espacio entre ambos cilindros toda vez que se necesita aplicar un par constante de $T_c = 9$ kgf.cm, para mantener una velocidad angular, $\omega = 600$ rpm.



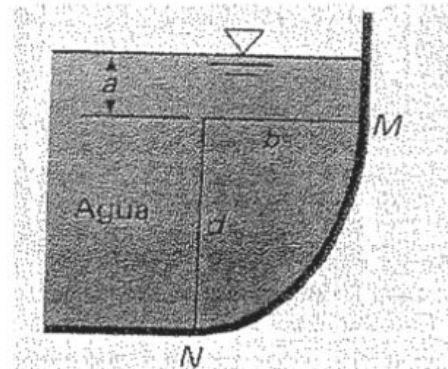
$$\frac{du}{dy} = \frac{2\pi r_2 N}{60 b} \quad \text{siend } b \ll r_2, \quad \tau = \frac{T_c}{\pi r_1^2 h} \quad \text{entonces } \mu = \frac{15 T_c b}{\pi^2 r_1^2 r_2 h N}$$

$$\mu = \frac{15 T_c b}{\pi^2 r_1^2 r_2 h N} = \frac{15 \cdot 9 \text{ kgfcm} \cdot 9,8 \frac{\text{N}}{\text{kgf}} \cdot \frac{1\text{m}}{100 \text{ cm}} \cdot 0,006 \text{ m}}{\pi^2 (0,12 \text{ m})^2 (0,126 \text{ m}) \cdot 0,3 \text{ m} \cdot 600 \frac{1}{\text{s}}} = 0,024 \frac{\text{N}}{\text{m}^2 \text{ s}}$$

Trabajo Práctico n° 2 – Estática de los fluidos

Problema N°4

Un depósito con bordes verticales que contiene agua tiene una longitud de 6 m en la dirección normal al plano de la figura. El croquis muestra una parte de la sección transversal en la que NM es un cuarto de una elipse con semiejes b y d. Si $b = 2.5$ m y $d = 4$ m y $a = 1.0$ m, halle, para la superficie representada por MN, la magnitud y posición de las líneas de acción de a) la componente horizontal de la fuerza; b) la componente vertical de la fuerza; c) la fuerza resultante y su dirección respecto de la horizontal.



$$F_R = \sqrt{F_V^2 + F_H^2}$$

$$F_V = \gamma V = F_{V_{MOAB}} + F_{V_{MON}} = \gamma (r h \text{ prof} + \frac{\pi r_1 r_2}{4} \text{ prof})$$

$$F_V = 1000 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^3} \left(2.5 \text{ m } 1 \text{ m } 6 \text{ m} + \frac{31,4 \text{ m}^2}{4} 6 \text{ m} \right) = 62100 \text{ kgf o } 609 \text{ KN}$$

$$F_H = \gamma h_{cp} A_{M'N'} = \gamma h_{cp} (r \text{ prof})$$

$$F_H = 1000 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^3} 3,2 \text{ m } (4 \text{ m } 6 \text{ m}) = 76800 \text{ kgf o } 752 \text{ KN}$$

$$\theta = \arctg \frac{F_V}{F_H} = 40^\circ$$

Centro de presión

$$F_V x_{cp} = F_{V1} \frac{4r}{3\pi} + F_{V2} \frac{r}{2}$$

$$x_{cp} = \frac{F_{V1} \frac{4r}{3\pi} + F_{V2} \frac{r}{2}}{F_V} = \frac{68750 \text{ kgfm}}{62100 \text{ kgf}} = 1,107 \text{ m}$$

$$y_{cp} = \frac{I x_{cg}}{y_{cg} A} + y_{cg}$$

$$y_{cp} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{2,69 \text{ m } A_{M'N'}} + \left(\frac{4r}{3\pi} + a \right) = 3,2 \text{ m}$$

Trabajo Práctico n° 3 – Cinemática de los fluidos

Problema N°3: defina si los siguientes flujos son irrotacionales:

- a) $u = -2y; v = 3x$
 b) $u = 3x; v = 6xy$
 c) $u = c; v = xy$

$$w = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{rot } \bar{v} = \frac{1}{2} (\nabla \times \bar{v})$$

Si el determinante es no nulo entonces el movimiento es rotacional (flujo real)

Si el determinante es nulo entonces el movimiento es irrotacional (flujo ideal), $w_x = w_y = w_z = 0$

a-

$$w = \frac{1}{2} \left[(0 - 0)i + (0 - 0)j + \left(\frac{\partial(3x)}{\partial x} - \frac{\partial(-2y)}{\partial y} \right) k \right]$$

$$w = \frac{1}{2} [0i + 0j + (3 + 2)k] \text{ por lo tanto el flujo es rotacional}$$

b-

$$w = \frac{1}{2} \left[(0 - 0)i + (0 - 0)j + \left(\frac{\partial(6xy)}{\partial x} - \frac{\partial(3x)}{\partial y} \right) k \right]$$

$$w = \frac{1}{2} [0i + 0j + (6y - 0)k] \text{ por lo tanto el flujo es irrotacional para } y = 0$$

c-

$$w = \frac{1}{2} \left[(0 - 0)i + (0 - 0)j + \left(\frac{\partial(xy)}{\partial x} - \frac{\partial(c)}{\partial y} \right) k \right]$$

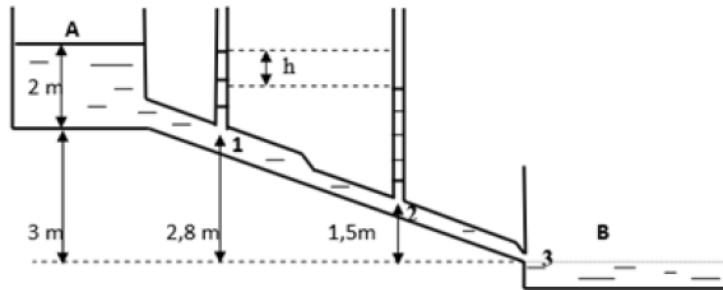
$$w = \frac{1}{2} [0i + 0j + (y - 0)k] \text{ por lo tanto el flujo es irrotacional para } y = 0$$

Trabajo Práctico n°4 – Dinámica de los fluidos

Problema N°1

Los depósitos A y B se grandes dimensiones, están conectados por una tubería de sección variable. El nivel de agua en el depósito A es de 2 metros y el desnivel entre ambos depósitos es de 3 metros. El radio en el tramo de tubería 1 es 3 cm, reduciéndose a la mitad en el punto 2 y a un tercio en el punto 3. Considere $g = 9.81 \text{ m/s}^2$; $z_1 = 2.8 \text{ m}$; $z_2 = 1.5 \text{ m}$; $z_3 = 0 \text{ m}$ y $P_3 = P_0$. Calcular:

- Velocidad con que vierte el agua en el depósito B (punto 3) y caudal expresado en l/s .
- Velocidad en los puntos 1 y 2
- Representar la línea de altura total y línea de altura piezométrica (altura piezométrica = altura total – la componente de velocidad) en los puntos A, 1, 2 y B.
- Diferencia de altura h entre los piezómetros situados en los puntos 1 y 2



a-

$$\frac{P_3}{\gamma} + z_3 + \frac{v_3^2}{2g} = \frac{P_A}{\gamma} + z_A + \frac{v_A^2}{2g} \rightarrow \frac{v_3^2}{2g} = z_A$$

$$v_3 = \sqrt{2g z_A} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5 \text{ m}} = 9.9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$Q = v_3 A_3 = 0.0031 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \quad \text{o} \quad 3.1 \frac{\text{l}}{\text{s}}$$

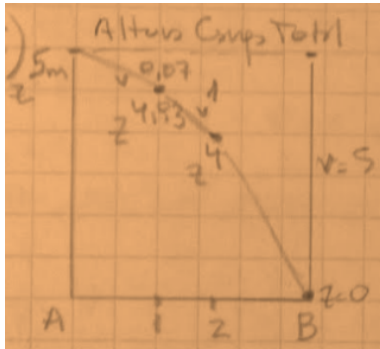
b- Ec. Continuidad

$$v_3 A_3 = cte = v_2 A_2 \quad \text{y} \quad v_3 A_3 = cte = v_1 A_1$$

$$\frac{v_3 A_3}{A_2} = v_2 = 4.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\frac{v_3 A_3}{A_1} = v_1 = 1.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

c- Altura de carga



d-

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \Delta h = (z_2 - z_1) + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}$$

$$\Delta h = 1,3 \text{ m} + 0,93 \text{ m} = 2,2 \text{ m}$$

Trabajo Práctico n° 5 – Influencia de la viscosidad

Problema N°1

Una tubería conduce petróleo de Mendoza con un caudal, $Q = 0,057 \text{ m}^3/\text{s}$, hasta una distancia de 302,80 m. La pérdida de carga no debe exceder $1,37 \text{ kgf/cm}^2$.

Calcular:

- Diámetro de la tubería
- La potencia de bombeo necesaria
- El perfil de velocidad en la tubería
- El esfuerzo cortante en la pared de la tubería

a-

$$\text{Segun ecuacion de Hagen Poiseuille } D = \sqrt[4]{\frac{Q \cdot 128 \mu L}{\Delta P \pi}}$$

$$D = \sqrt[4]{\frac{0,057 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \cdot 128 \cdot 0,144 \frac{\text{kgf} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} \cdot 302,8 \text{ m}}{1,37 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^2} \cdot 3,14}} = 0,29 \text{ m}$$

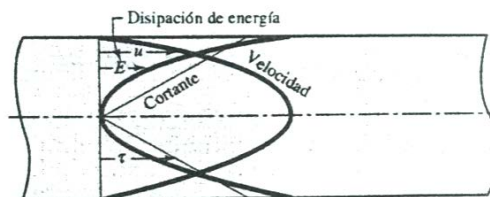
b-

$$N = \frac{Q \gamma H}{75 \eta} = \frac{Q \Delta P}{75 \cdot 0,75} = 14 \text{ CV}$$

c-

$$\tau = -\frac{r}{2} \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$V = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial x} (r_0^2 - r^2)$$



Trabajo Práctico n° 6 – Flujo en conductos cerrados

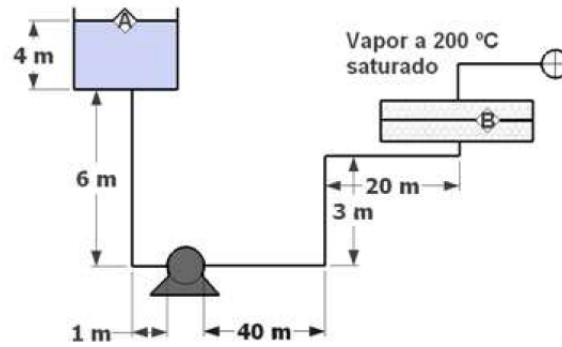
Problema N°1

Para abastecer de agua a una caldera se trae el líquido desde un tanque elevado. El agua está a 82°C y se bombea razón de 380 L/min. La tubería es de acero comercial Norma ASTM A-53 Schedule 40. La temperatura de salida del vapor de la caldera es de 200°C y está saturado. La eficiencia de la bomba es de 85%. La cañería tiene un diámetro de 2 pulgadas.

¿Cuál debe ser la potencia de la bomba?

Considerar:

- Rugosidad de acero comercial $e=0.006$ cm
- Viscosidad a 82°C $3,550e^{-4}$ N-s/m²
- Presión de vapor a 200°C 15,8 kgf/cm²
- Volumen específico a 200°C: 1156,5 m³/kg



Problema tipo I - Det. Perdida de carga hL

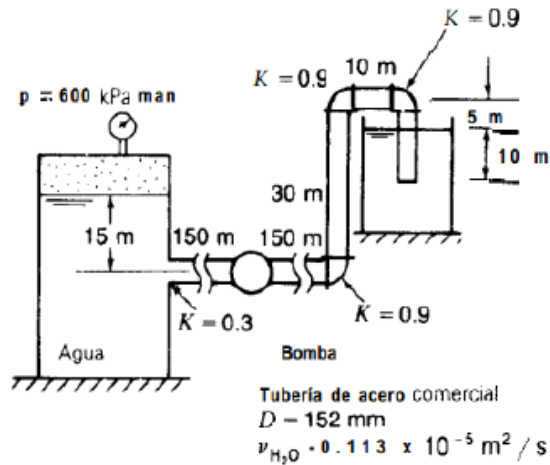
Aspiracion		
Ec. DARCY WEISBACH		
Longitud de cañería	7	m
Longitud de accesorios	3,4	m
Longitud Total de cañería	10,4	m
Caudal de referencia	380	LPM
	0,00633333	m ³ /seg
Velocidad	0,78	m/s
Diametro	0,1016	m
Area	0,00810321	m ²
Rugosidad	0,00006	m
K/D	0,0006	
Visc Cinematica Agua 82°C	3,50E-07	m ² /s
Visc Absoluta Agua 82°C	3,55E-04	N.s/m ²
Peso especifico Agua	9806	N/m ³
n° Re	226.882,47	
factor f x ec	0,00	reg laminar
factor f x ec	0,01	reg transic
factor f x graf Moody	0,022	reg turb
Perdida de carga hL	0,07	m

Impulsion		
Ec. DARCY WEISBACH		
Longitud de cañería	63	m
Longitud de accesorios	10,2	m
Longitud Total de cañería	73,2	m
Caudal de referencia	380	LPM
	0,00633333	m3/seg
Velocidad	3,13	m/s
Diametro	0,0508	m
Area	0,0020258	m ²
Rugosidad	0,00006	m
K/D	0,0012	
Visc Cinematica Agua 82°C	3,50E-07	m ² /s
Visc Absoluta Agua 82°C	3,55E-04	N.s/m ²
Peso especifico Agua	9806	N/m ³
n° Re	453.764,94	
factor f x ec	0,00	reg laminar
factor f x ec	0,01	reg transic
factor f x graf Moody	0,019	reg turb
Perdida de carga hL	13,65	m

SISTEMA COMPLETO		
Ec. Bernoulli		
Perdida de carga hL TOTAL	13,72	m
P1/P ESPEC	0	m
P2/ P ESPEC	158	m
DP/P ESPEC	158,00	m
Z1	10	m
Z2	3	m
	-	
DZ	7,00	m
V2/2g en 1	0	
V2/2g en 2	0	
D vel	-	m
H BOMBA	164,72	m
Potencia de la bomba	16,36	CV

Problema N°2

Encontrar el caudal si la bomba suministra al flujo $H_m = 17$ m



Problema tipo 2 - Det.Q o V		
Aspiracion		
Ec. DARCY WEISBACH		
Longitud de cañería	150	m
Longitud de accesorios	3	m
Longitud Total de cañería	153	m
Caudal de referencia	5986	LPM
	0,10	m3/seg
Velocidad	5,50	m/s
Diametro	0,152	m
Area	0,01813664	m2
Rugosidad	0,000045	m
K/D	0,00030	
Visc Cinematica Agua 20°C	1,13E-06	m2/s
Visc Absoluta Agua 20°C		N.s/m2
Peso especifico Agua	9806	N/m3
n° Re	739.880,72	
factor f x ec	0,00	reg laminar
factor f x ec	0,01	reg transic
factor f x graf Moody	0,018	reg turb
Perdida de carga hL	27,97	m

Impulsion		
Ec. DARCY WEISBACH		
Longitud de cañeria	195	m
Longitud de accesorios	24	m
Longitud Total de cañeria	219	m
Caudal de referencia		LPM
	0,10	m3/seg
Velocidad	5,50	m/s
Diametro	0,152	m
Area	0,01813664	m2
Rugosidad	0,00006	m
K/D	0,0004	
Visc Cinematica Agua 82°C	3,50E-07	m2/s
Visc Absoluta Agua 82°C	3,55E-04	N.s/m2
Peso especifico Agua	9806	N/m3
n° Re	2.388.757,74	
factor f x ec	0,00	reg laminar
factor f x ec	0,01	reg transic
factor f x graf Moody	0,018	reg turb
Perdida de carga hL	40,03	m

SISTEMA COMPLETO		
Ec. Bernoulli		
Perdida de carga hL TOTAL	68,00	m
Perdia hL calculada	68,00	m
P1/P ESPEC	61	m
P2/ P ESPEC	0	m
DP/P ESPEC	- 61,00	m
Z1	15	m
Z2	25	m
DZ	10,00	m
V2/2g en 1	0	
V2/2g en 2	0	
D vel	-	m
H BOMBA	17	m
Potencia de la bomba	26,60	CV

	Diag Aux Moody/hL	Lt	D	Veloc	Visc cin	n° Re	K/d	f
f sup	0,015	68,00	372,00	0,152	6,03	1,13E-06	810.499	0,00030
f 1	0,016	68,00	372,00	0,152	5,83	1,13E-06	784.762	0,00030
f 2	0,017	68,00	372,00	0,152	5,66	1,13E-06	761.331	0,00030
f 3	0,018	68,00	372,00	0,152	5,50	1,13E-06	739.881	0,00030

Problema N°3

¿Cuál será el diámetro de una tubería de acero galvanizado, para que circule un caudal de agua de $0,025 \text{ m}^3/\text{s}$ a 20°C y con una pérdida máxima admisible del 4%?

Considerar: $e=0.015 \text{ cm}$

Problema tipo 3 - Det.diámetro		
Ec. DARCY WEISBACH		
Longitud de cañería	100	m
Longitud de accesorios	0	m
Longitud Total de cañería	100	m
Caudal de referencia	1500	LPM
	0,025	m ³ /seg
Velocidad	1,99	m/s
Diámetro	0,126	m
Area	0,01255381	m ²
Rugosidad	0,00015	m
K/D	0,00119	
Visc Cinematica Agua 20°C	1,07E-06	m ² /s
Visc Absoluta Agua 20°C		N.s/m ²
Peso especifico Agua	9806	N/m ³
n° Re	235.360,54	
factor f x ec	0,00	reg laminar
factor f x ec	0,01	reg transic
factor f x graf Moody	0,025	reg turb
Perdida de carga hL	4,00	m
Perdia de carga dato	4,00	m

	Diag Aux Mo hL	Lt	Diam calculo	Veloc	Q	Visc cin	n° Re	K/d	f	
f sup	0,015	4,00	100,00	0,114	2,44	0,025	1,07E-06	260.677	0,00131	0,023
f 1	0,023	4,00	100,00	0,124	2,06	0,025	1,07E-06	239.318	0,00121	0,025
f 2	0,025	4,00	100,00	0,126	1,99	0,025	1,07E-06	235.361	0,00119	0,025
f 3	0,025	4,00	100,00	0,126	1,99	0,025	1,07E-06	235.361	0,00119	0,025

Trabajo Práctico n° 7 - Análisis dimensional y semejanza hidráulica

Problema N°1

Para el caso de un líquido ideal, expresar el caudal Q a través de un orificio en función de la densidad del líquido, el diámetro del orificio y la diferencia de presiones. (Método de Rayleigh)

Método Rayleigh

Caudal $Q = f(\rho, \phi, \Delta P)$ donde $\rho = M L^{-3}$, $\phi = L$, $\Delta P = M L^{-1} T^{-2}$ y $Q = L^3 T^{-1}$

$$Q = K (\rho^a \phi^b \Delta P^c)$$

$$L^3 T^{-1} = K (M^a L^{-3a}) (L^b) (M^c L^{-1c} T^{-2c})$$

Entonces:

Para M, $0 = a + c$ luego $a = -1/2$

Para L, $3 = -3a + b - 1c$ luego $b = 2$

Para T, $-1 = -2c$ luego $c = 1/2$

Finalmente

$$Q = K \left(\rho^{-\frac{1}{2}} \phi^2 \Delta P^{\frac{1}{2}} \right) \rightarrow \text{siendo } K = \frac{Cd}{\sqrt{1-\beta^4}} \frac{\pi}{4} \sqrt{2} \text{ entonces } Q = \frac{Cd A_o}{\sqrt{1-\beta^4}} \sqrt{\frac{2 \Delta P}{\rho}}$$

Trabajo Práctico n° 8 – Flujo compresible:

Problema N°2

Por una tubería de acero de 60 mm diámetro y 2 mm de espesor fluye una gasolina (de modulo $E_v=11000 \text{ kgf/cm}^2$ y densidad relativa 0,88). Determinar la velocidad de una onda de presión.

Considerar: $E_{\text{acero}}=2100000 \text{ Kgf/cm}^2$

$$h = \frac{v}{g} \frac{\sqrt{\frac{K}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{K D}{t E}}}$$

$$\text{Velocidad de la onda de presión } C = \frac{g h}{v} = \frac{\sqrt{\frac{K}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{K D}{t E}}}$$

$$C = \frac{g h}{v} = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{\rho \left(1 + \frac{K D}{t E}\right)}} = \sqrt{\frac{11000 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \cdot 10000 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}^2} \cdot 9,8 \frac{\text{N}}{\text{kgf}}}{880 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} (1 + 0,15)}} = 1028 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

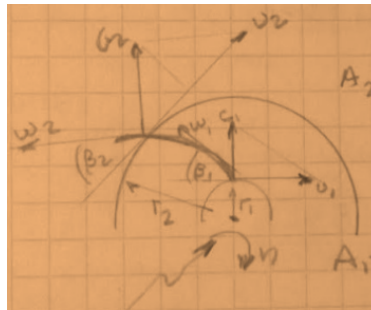
Trabajo Práctico n° 9 – Bombas centrífugas:

Problema N°1

Una bomba centrífuga que produce un caudal de agua de 300 m³/h tiene las siguientes características: $D_1=150$ mm; $D_2/ D_1=3$; $b_1=40$ mm; $b_2/ b_1=0.5$; $\beta_1=60^\circ$; $\beta_2=40^\circ$. Entrada radial y despreciar las pérdidas

Calcular: a) rpm; b) altura de la bomba; c) potencia; d) altura dinámica del rodete; e) grado de reacción

Rta: a) 325 rpm; 3.24m; 2644 w; 0.33m;90%



a-

$$Q = A_1 c_{1m} = A_1 U_1 \operatorname{tg} \beta_1$$

$$n = \frac{Q 60}{A_1 2 \pi r_1 \operatorname{tg} \beta_1} = 325 \text{ rpm}$$

$$\text{según Euler para } \alpha_1 = 90^\circ \quad H_{t\infty} = \frac{U_2 C_{2u}}{g} = 3,24 \text{ m}$$

$$U_2 = 2 \pi r_2 \frac{n}{60} = 7,56 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad C_{2m} = \frac{Q}{A} = 2,96 \frac{\text{m}}{\text{s}} \rightarrow C_{2u} = U_2 - \frac{C_{2m}}{\operatorname{tg} \beta_2} = 4,03 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b-

$$N = Q \gamma H = 0,083 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} 9806 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} 3,2 \text{ m} = 2640 \text{ W}$$

c-

$$\frac{\Delta P}{\gamma} = H_{t\infty} - \left(\frac{C_2 m^2 - C_1 m^2}{2g} \right) = 3,2 \text{ m} - 0,3 \text{ m} = 2,9 \text{ m}$$

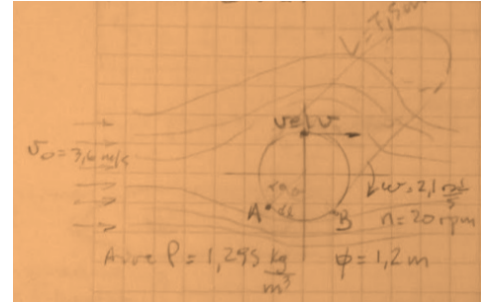
$$G_R = \frac{H_p}{H_t} = 1 - \frac{H_d}{H_t} = 90\%$$

Trabajo Práctico n° 10 – Flujo sobre cuerpos sumergidos:

Problema N°1

Un cilindro, de diámetro 1,2 m y de largo 7,5 m, gira a 20 rpm. El eje del cilindro es perpendicular a una corriente de aire. La velocidad de la corriente es de 3,6 m/s y tiene una densidad de 1,295 kg/m³. Suponiendo que no hay resbalamiento entre el cilindro y el flujo circulante hallar:

- Valor de la circulación, Γ
- La fuerza transversal, o de elevación, F_L
- Los puntos de estancamiento, f



a- Circulación

$$v_c = v_t = \omega r = 1,26 \frac{m}{s}$$

$$\Gamma = \oint_0^{2\pi} v_c r_o d\theta = 2\pi r_o v_c$$

$$\Gamma = 2\pi r_o \frac{2\pi n r_o}{60} = 4,74 \frac{m^2}{s}$$

b- Ecuación de Kutta-Jukowsky $S = L \rho v_o \Gamma$, para que haya empuje ascensional debe haber circulación.

$$S = L \rho v_o \Gamma = 7,5 m \cdot 1,295 \frac{kg}{m^3} \cdot 3,6 \frac{m}{s} \cdot 4,74 \frac{m^2}{s} = 165 N$$

c- Por combinación de efectos $v = 2 v_o \text{ sen } \Theta + v_t$

Punto de estancamiento ($v=0$), $v/v_t = 2 (v_o/v_t) \text{ sen } \Theta + 1$

$$\text{sen } \Theta = -\frac{1}{2} \frac{v_t}{v_o} \rightarrow \Theta = -10^\circ \text{ y } 190^\circ$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Trabajo Práctico n° 1 – Propiedades de los fluidos

El diámetro de los pistones de un motor de automóvil de seis cilindros es de 75 mm y el de los cilindros de 75,13 mm. Determinar la disminución del esfuerzo de corte si el lubricante (aceite SAE 30) se calienta de 0°C a 120°C. Considerar que el vehículo se mueve a 40 km/h.

Respuesta: se reduce un 98%.

Trabajo Práctico n° 2 – Estática de los fluidos

Determinar la presión ejercida sobre la compuerta triangular, centro de presión y fuerza de apertura, que ejerce un aceite $S_r=0,8$ dentro de un contenedor de paredes inclinadas 30° respecto de la horizontal. La compuerta se ubica 8 m debajo de la intersección de ejes sobre la superficie inclinada, y tiene una base de 10 m y altura de 6m.

Respuesta, $F=1,53$ MN, centro de presión $X_{cg}=X_p=2m$ $Y_{cg}=13m$ $Y_p=13,15m$ $F_{ap}>0,51$ MN a 6m (en el vértice h)

Trabajo Práctico n° 3 – Cinemática de los fluidos

Determinar si el siguiente flujo es irrotacional, $u=x^2$ y $v=-2xy + 4x$.

Respuesta: Flujo irrotacional para $y=2$

Trabajo Práctico n°4 – Dinámica de los fluidos

Por una tubería circula un líquido incompresible ($\gamma=1000$ kgf/m³), en flujo permanente y sin fricción. Las alturas geodésicas son $z_1=5m$ y $z_2=3m$, y sus diámetros $D_1=0,3m$ y $D_2=0,4m$. La velocidad en la sección 1 es $V_1=2m/s$, y la presión manométrica $P_1=0,10$ kgf/cm². Calcular el caudal que circula, nivel piezométrico en la sección 1, y cota del plano hidrodinámica.

Respuesta: $Q=0,14$ m³/s $H_1=6m$ Cota Hidrodinámica = 6,2 m

Trabajo Práctico n° 5 – Influencia de la viscosidad

Determinar la pérdida de carga en una tubería de 30 cm de diámetro que conduce un fluido con $Q=0,057 \text{ m}^3/\text{s}$ hasta una distancia de 302,8m. Calcular la potencia de la bomba.

Respuesta: $\Delta P=1,4 \text{ kgf/cm}^2$ y $N=14 \text{ CV}$

Trabajo Práctico n° 6 – Flujo en conductos cerrados

En una instalación se requiere llegar a la válvula de toma de agua con una presión de 2 bar, la fuente envía agua con una presión 3 veces mayor. Seleccione los caños a utilizar del depósito o rezago, a fin de poder montar el tramo de cañería que resulte en la pérdida de carga deseada. Luego calcule el caudal que fluirá.

- A- 112 caños de 4" x 12m c/u
- B- 35 caños de 3 1/6" x 12 m c/u
- C- 40 m caño 4"
- D- 60 m caño 3"
- E- 100 m caño 2,5"

Respuesta: 1341 m de cañería de 4" y $Q=0,013 \text{ m}^3/\text{s}$

Trabajo Práctico n° 7 - Análisis dimensional y semejanza hidráulica

Desarrollar una ecuación que exprese la pérdida de carga, Δh , en una tubería horizontal para un fluido incompresible y en el siguiente tipo de régimen: Flujo laminar. Utilizar el teorema π de Buckingham.

Respuesta: Las cantidades a utilizar son Q , $\Delta P/L$, D , μ y dará la ecuación de Hagen Poiseuille

Trabajo Práctico n° 8 – Flujo compresible:

Determinar la velocidad de la onda de presión que viaja en una cañería que transporta un fluido de $Sr=0,9$ y el tiempo de cierre. Que consideraciones hay que tener respecto al cierre para proteger la cañería aguas arriba y aguas debajo de la válvula?. La cañería tiene un diámetro de 50 mm, espesor de pared de 2 mm, modulo E_v 2100000 kgf/cm^2 y factor K 11000 kgf/cm^2 .

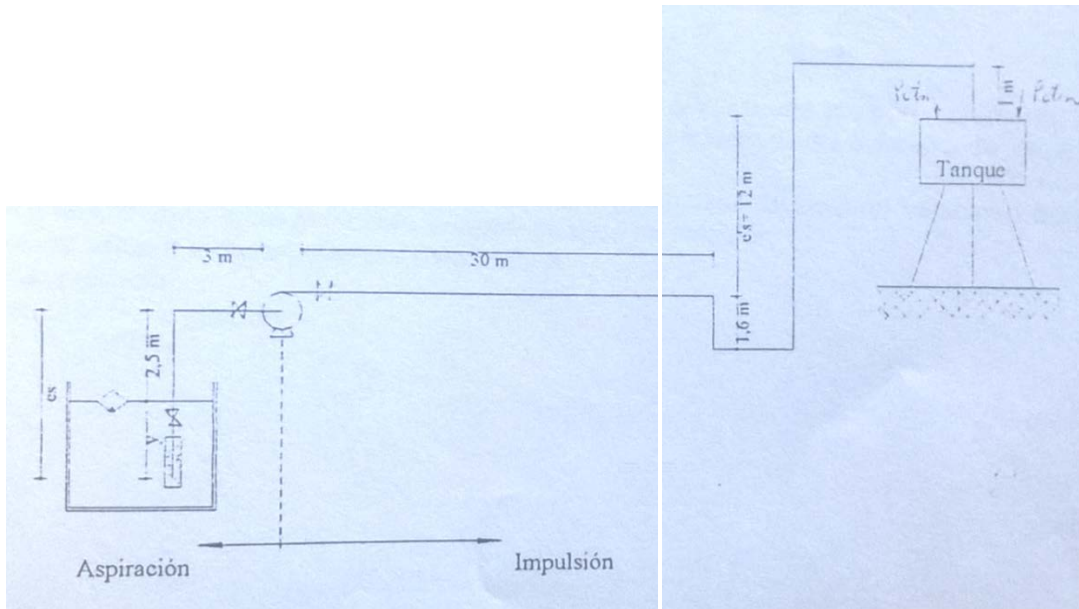
Respuesta: $c=1041 \text{ m/s}$ y $t_{cr} \leq 1,9 \text{ s}$

Trabajo Práctico n° 9 – Bombas centrífugas:

Calcular la H_m y potencia necesaria del motor de una bomba que entrega un caudal de $100 \text{ m}^3/\text{h}$.

Determinar el diámetro de la cañería considerando un pérdida $h_L/L = 2,5\%$.

A continuación se detalla la instalación:



Respuesta: $H_m = 16 \text{ m}$ $N = 9 \text{ CV}$ $D = 0,13 \text{ m}$

Trabajo Práctico n° 10 – Flujo sobre cuerpos sumergidos:

Determinar la fuerza de arrastre que se produce durante la caída de un grano de arena en un tanque de agua a temperatura ambiente. Diámetro del grano $0,25 \text{ mm}$, velocidad de caída $0,024 \text{ m/s}$.

Respuesta $R_f = 5,7 \cdot 10^{-8} \text{ N}$